بیست و ششمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و دوازدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه خوارزمی،
تهران، ایران.
۱۶-۱۵ بهمن ۱۳۹۸

اثر جفت‌شدگی غیرخطی اتم-میدان بر درهم‌تنیدگی یک سامانه دوکیوبیتی: رهیافت عملگر تحول زمانی وابسته به شدت

میثم، ستوده خیرآبادی، مهران، رفیعی و محمدکاظم، توسلی

گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

meysam.setodeh1376@gmail.com, mehran.rafeie1377@gmail.com, **mktavassoly@yazd.ac.ir**

در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی دو اتم دوترازی در برهم‌کنش اتم-میدان وابسته به شدت (غیرخطی) در یک کاواک اپتیکی تک‌مد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا سامانه و هامیلتونی متناظر با آن را معرفی می‌کنیم و سپس با استفاده از هامیلتونی در تصویر برهم‌کنش، عملگر تحول زمانی وابسته به شدت را در پایه‌های دوکیوبیتی می‌سازیم. بر این اساس، تحول زمانی ماتریس چگالی مشخص می‌شود. با استفاده از ماتریس چگالی کاهش‌یافته، سنجه تلاقی را برای سامانه دوکیوبیی محاسبه می‌کنیم. در آخر با محاسبه تلاقی تاثیر جفت‌شدگی وابسته به شدت را بررسی و با مورد خطی (جفت‌شدگی ثابت) مقایسه می‌کنیم. خواهیم دید که در جفت‌شدگی وابسته به شدت، در مقایسه با جفت‌شدگی ثابت به حفظ بهتر درهم‌تنیدگی کیوبیت‌ها دست می‌یابیم.

کلید واژه- تلاقی، جفت‌شدگی غیرخطی، درهم‌تنیدگی

The Influence of atom-field nonlinear coupling on the two- qubit entanglement: Intensity-dependent time evolution operator approach

Meysam, Setodeh Kheirabady, Mehran, Rafeie and Mohammad Kazem, Tavassoly

Optics and Laser Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract- In this paper we study the dynamics of entanglement between two qubits (two-level atoms) when the atom–field interaction is intensity-dependent, At first we determine the model and its Hamiltonian, then, using the interaction picture of the Hamiltonian, the intensity-dependent time evolution Hamiltonian operator is obtained in the basis of two qubits. Using this operator, density operator evolution is achieved. With the help of the reduced density matrix, we evaluate the concurrence measure of the two-qubits. At last, by numerical analysis, the influence of intensity-dependent coupling is investigated and compared with linear regime (constant coupling). We observe that in the case of nonlinear coupling, comparing with constant coupling, preservation of entanglement can be achieved.

Keywords: Concurrence, Entanglement, intensity dependent atom-field coupling

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]

مقدمه

ناجایگزیدگی (عدم موضعیت) یکی از مشخصه‌های مکانیک کوانتومی است که معادل کلاسیکی ندارد. نمونه‌ای نوعی از ناجایگزیدگی، حالت‌های درهم‌تنیده یک سامانه دوذره‌ای است که نقش مهمی در اطلاعات و محاسبات کوانتومی ایفا می‌کند [۱]. این مفهوم اولین بار توسط انیشتن، پودولسکی و روزن و در پی آن، شرودینگر مطرح شد که بعدها منجر به پایه‌گذاری نامساوی بل شد. درهم‌تنیدگی و نامساوی بل در یک کاواک اپتیکی برای اتم‌های یکسان در مرجع [۲] بررسی شده است. در این راستا، بخش قابل توجهی از پژوهش‌های جدید که در حوزه فرآیندها و فناوری‌های اطلاعات کوانتومی مورد استفاده نظری و تجربی قرار می‌گیرد، متمرکز بر تولید و اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی در سامانه‌های برهم‌کنشی اتم-میدان و بررسی تحول زمانی آن‌ها است. در این مقاله دینامیک درهم‌تنیدگی در برهم‌کنش وابسته به شدت در دو اتم دو ترازی با یک میدان تک‌مد را با روش عملگر تحول زمانی وابسته به شدت بررسی و نهایتا با مورد جفت‌شدگی ثابت (خطی) مقایسه می‌کنیم.

مدل سامانه و روابط پایه

سامانه مورد مطالعه متشکل از یک سامانه درهم‌تنیده دوکیوبیتی و یک میدان اپتیکی تک‌مد با بسامد ω است. هامیلتونی برهم‌کنش این سامانه براساس مدل تاویس-کامینگز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + i\sum_{j=1}^{2}(\hat{a}gf(\hat{n})\hat{\sigma}_j^{+} - gf(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_j^{-}), \qquad (۱)$$

در اینجا $\hat{a}$ ($\hat{a}^{\dagger}$) عملگر فنا (آفرینش) میدان و $\hat{\sigma}_j^{\pm} = \hat{\sigma}_j^{x} \pm i\,\hat{\sigma}_j^{y}$ ماتریس های پاؤلی مربوط به کیوبیت‌ها هستند. $gf(\hat{n})$ نیز جفت‌شدگی سامانه اتم-میدان است که به وضوح وابسته به تعداد فوتون‌ها (شدت) است. در این مقاله جفت‌شدگی وابسته به شدت را با تابع غیرخطی $f(\hat{n}) = \sqrt{\hat{n}}$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم. هامیلتونی برهم‌کنش در تصویر برهم‌کنش به کمک رابطه (۲) $\hat{H}_I = \hat{R}(t)\hat{H}\hat{R}^{\dagger}(t) - i\hat{R}(t)\frac{\partial}{\partial t}\hat{R}^{\dagger}(t)$ حاصل می‌شود:

$$\hat{H}_I = i\sum_{j=1}^{2}(\hat{a}gf(\hat{n})e^{-i\omega t}\hat{\sigma}_j^{+} - gf(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}e^{i\omega t}\hat{\sigma}_j^{+}), \qquad (۳)$$

که در آن $\hat{R}(t)$ یک عملگر یکانی است. پایه‌های دوکیوبیتی $\{|e_i\rangle\}_{i=1,\ldots,4}$ عبارت‌اند از:

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ |e_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ |e_3\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ |e_4\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad (۴)$$

حال می‌توان عملگر تحول‌زمانی در تصویر برهم‌کنش (با جفت‌شدگی وابسته به شدت میدان) را به‌دست آورد:

$$\hat{U}_I(t) = \begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}, \qquad (۵)$$

که در آن:

$$u_{11} = \begin{pmatrix} 1-2\hat{a}f(\hat{n})\dfrac{\mathrm{Sin}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}})}{\hat{s}}f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger} & \hat{a}f(\hat{n})\dfrac{\mathrm{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} \\ -\dfrac{\mathrm{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}}f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger} & \mathrm{Cos}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}}) \end{pmatrix},$$

$$u_{12} = \begin{pmatrix} \hat{a}f(\hat{n})\dfrac{\mathrm{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} & 2\hat{a}f(\hat{n})\dfrac{\mathrm{Sin}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}})}{\hat{s}}\hat{a}f(\hat{n}) \\ \mathrm{Cos}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}}) & \dfrac{\mathrm{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}}\hat{a}f(\hat{n}) \end{pmatrix},$$

$$u_{21} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\mathrm{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}}f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger} & -\mathrm{Sin}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}}) \\ 2f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}\dfrac{\mathrm{Sin}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}})}{\hat{s}}f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger} & -f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}\dfrac{\mathrm{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} \end{pmatrix},$$

$$u_{22} = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}}) & \dfrac{\mathrm{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}}\hat{a}f(\hat{n}) \\ -f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}\dfrac{\mathrm{Sin}(gt\sqrt{2\hat{s}})}{\sqrt{2\hat{s}}} & 1-2f(\hat{n})\hat{a}^{\dagger}\dfrac{\mathrm{Sin}^2(gt\sqrt{\frac{\hat{s}}{2}})}{\hat{s}}\hat{a}f(\hat{n}) \end{pmatrix},$$

که در آن $\hat{S} = f^{2}(\hat{n}+1)(\hat{n}+1) + \hat{n}f^{2}(\hat{n})$. جالب است که رابطه‌ی عملگری $\hat{S}$ به‌طور مستقیم با هامیلتونی نوسانگرهای غیرخطی (تغییر شکل یافته) مرتبط است [۳] ($\frac{\omega}{2}\hat{S} = \hat{H}_f$).

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]

با قرار دادن $f(\hat{n})=1$ در (۵) به رابطه عملگر تحول زمانی که در مرجع [۴] به‌دست آمده است می‌رسیم. حال، تحول‌زمانی عملگر چگالی را می‌توان طبق معادله فون-نویمن $i\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt}=[\hat{H}_I,\hat{\rho}(t)]$ و یا به‌کمک $\hat{\rho}(t)=\hat{U}_I(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}_I{}^{\dagger}(t)$ به‌دست آورد. فرض می‌کنیم که عملگر چگالی در $t=0$ شامل دو بخش اتمی و میدانی به صورت $\hat{\rho}(0)=\hat{\rho}_\psi(0)\hat{\rho}_f(0)$ می‌باشد. که بخش میدانی و اتمی آن به‌صورت زیر است:

$$\hat{\rho}_\psi(0)=|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|\ ,$$

$$\hat{\rho}_f(0)=|\alpha\rangle\langle\alpha|,\quad |\alpha\rangle=e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{\sqrt{k!}}|k\rangle\,, \qquad (۶)$$

که در آن $|\alpha\rangle$ حالت همدوس میدان $\alpha=\gamma e^{i\varphi}$ یک عدد مختلط و $|\psi(0)\rangle$ یک حالت بهنجار درهم‌تنیده است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\psi\rangle=\mathrm{Sin}\,\xi e^{i\eta}|+,-\rangle+\mathrm{Cos}\,\xi e^{-i\eta}|-,+\rangle\,, \qquad (۷)$$

که ξ و η دو پارامتر دلخواه هستند. نمایش ماتریسی این عملگر در پایه‌های دوکیوبیتی به صورت زیر است:

$$\rho_\psi(0)=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\mathrm{Sin}^2\xi&\mathrm{Sin}\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\xi e^{i2\eta}&0\\0&\mathrm{Sin}\,\xi\,\mathrm{Cos}\,\xi e^{-i2\eta}&\mathrm{Cos}^2\xi&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \qquad (۸)$$

از عملگر چگالی روی حالت های عددی رد می‌گیریم:

$$\rho_{red}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\rho_{red}(t)|n\rangle\,, \qquad (۹)$$

که در آن :

$$\rho_n(t)=\sum_{j,l=0}^{\infty}(\hat{U}(t))_{nj}\,\rho_\psi(0)(\hat{U}^{\dagger}(t))_{\ln}\frac{\gamma^{j+l}e^{i(j-l)\varphi}}{\sqrt{j!\,l!}}e^{-\gamma^2}\,, \qquad (۱۰)$$

$$(\hat{U}_I(t))_{nj}=\langle n|\hat{U}_I(t)|j\rangle\,,\quad (\hat{U}_I{}^{\dagger}(t))_{\ln}=\langle l|\hat{U}_I{}^{\dagger}(t)|n\rangle\,, \qquad (۱۱)$$

در یک میدان همدوس میانگین تعداد فوتون ها γ^2 است که در اینجا α را حقیقی فرض کردیم. در واقع، ماتریس چگالی کاهش‌یافته در پایه‌های دوکیوبیتی به شکل زیر است:

$$\rho_r(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}(\rho_n)_{11}&(\rho_n)_{12}&(\rho_n)_{13}&(\rho_n)_{14}\\(\rho_n)_{21}&(\rho_n)_{22}&(\rho_n)_{23}&(\rho_n)_{24}\\(\rho_n)_{31}&(\rho_n)_{32}&(\rho_n)_{33}&(\rho_n)_{34}\\(\rho_n)_{41}&(\rho_n)_{42}&(\rho_n)_{43}&(\rho_n)_{44}\end{pmatrix}, \qquad (۱۲)$$

بدیهی است که $(\rho_n)_{ij}=(\rho_n)^*_{ji}$. با توجه به حجم عناصر ماتریس بالا (که به‌صورت تحلیلی بدست آمده‌اند) و بدلیل کمبود جا از ارائه صریح آنها در اینجا خودداری می‌کنیم. حال با استفاده از ماتریس چگالی کاهش‌یافته در (۱۲)، سنجه تلاقی را محاسبه می‌کنیم تا تاثیر برهم‌کنش جفت‌شدگی غیرخطی اتم-میدان بر درهم‌تنیدگی کیوبیت‌ها را مورد ارزیابی قرار دهیم. تلاقی به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$C(t)=Max\{0,\Lambda(t)\}\,, \qquad (۱۳)$$

$$\Lambda(t)=\sqrt{\lambda_1(t)}-\sqrt{\lambda_2(t)}-\sqrt{\lambda_3(t)}-\sqrt{\lambda_4(t)}\,, \qquad (۱۴)$$

که $\lambda_i(t);i=1,2,3,4$ ویژه‌مقادیر ماتریس زیر هستند:

$$\rho_r(t)(\sigma_y\otimes\sigma_y)\rho^*{}_r(t)(\sigma_y\otimes\sigma_y)\,, \qquad (۱۵)$$

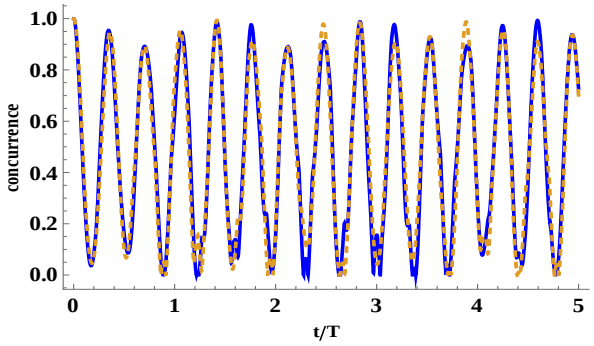
اثر جفت‌شدگی غیرخطی (و خطی) بر دینامیک درهم‌تنیدگی کیوبیت‌ها

در شکل‌های ۱ تا ۳ تغییرات زمانی سنجه تلاقی برای حالت درهم‌تنیده دوکیوبیتی با میانگین تعداد فوتون‌های $\alpha^2=0.1$ (شکل۱) و $\alpha^2=1$ (شکل۲) و $\alpha^2=5$ (شکل۳) با دو تابع تغییر شکل $f(\hat{n})=1,\sqrt{\hat{n}}$ رسم شده است. نمودارهای با رنگ قهوه‌ای مربوط به جفت‌شدگی خطی و نمودارهای با رنگ آبی مربوط به جفت‌شدگی غیرخطی هستند. اگر میانگین تعداد فوتون‌های اولیه کم باشد (شکل‌های ۱ و ۲) رفتار درهم‌تنیدگی نوسانی است و تغییر فاحشی بین جفت‌شدگی وابسته به شدت و جفت‌شدگی ثابت دیده نمی‌شود و در هر دو بیشینه درهم‌تنیدگی تقریبا یکسان است. همچنین در این موارد بیشینه تقریبا ثابت و به‌ویژه در شکل ۱ نزدیک یک باقی می‌ماند. همچنین، در شکل ۱ نمودارها تقریبا منطبق بر هم هستند، درحالی که در شکل ۲ چنین نیست. اما با افزایش میانگین تعداد فوتون‌ها (شکل۳: $\alpha^2=5$)، درهم‌تنیدگی برای مورد خطی دچار فروافتی در حدود ۵۰٪ می‌شود و نوسان‌ها

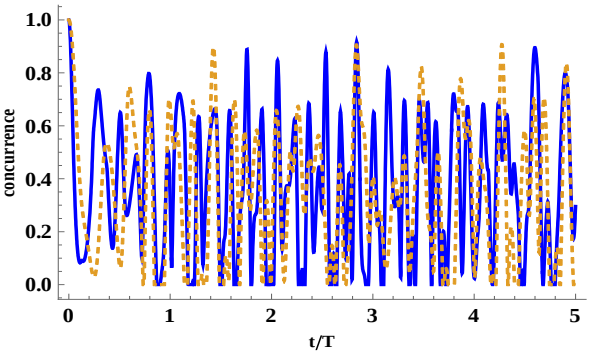
این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]

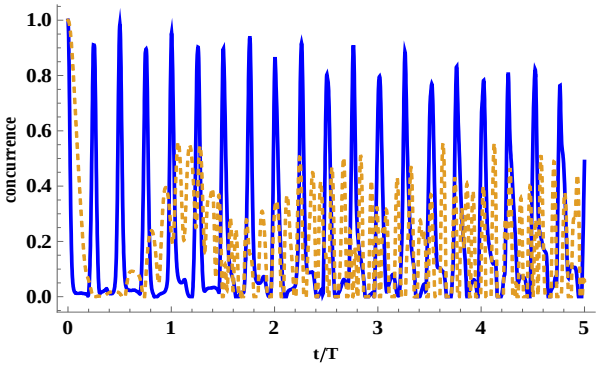
نیز بسیار نامنظم‌اند، اما برای جفت‌شدگی وابسته به شدت به‌صورت تقریبا تناوبی تغییر می‌کند و قله‌های درهم‌تنیدگی نیز در لحظه‌های بیشتری از زمان حاصل می‌شود، هرچند با گذشت زمان این قله‌ها در حال کاهش هستند، اما کاهشی کمتر از ۱۵٪.



شکل ۱: میزان تلاقی بر حسب زمان بدون بعد به ازای پارامترهای $\xi = \pi/4$ و $\gamma^2 = 0.1$ و $\eta = 0$ (خط پیوسته آبی رنگ $f(\hat{n}) = \sqrt{\hat{n}}$ و خط گسسته قهوه‌ای رنگ برای $f(\hat{n}) = 1$).



شکل ۲ : میزان تلاقی برحسب زمان (همه پارامترها مانند شکل۱، فقط $\gamma^2 = 1$).



شکل ۳ : میزان تلاقی برحسب زمان (همه پارامترها مانند شکل۱، فقط $\gamma^2 = 5$).

نتیجه‌گیری

در این مقاله با درنظر گرفتن جفت‌شدگی اتم-میدان غیرخطی، و با رهیافت عملگر تحول زمانی وابسته به شدت، دینامیک درهم‌تنیدگی دوکیوبیت را مورد بررسی قرار داده‌ایم. نتایج عددی نشان می‌دهند که اگر میانگین تعداد فوتون‌های اولیه میدان کم باشد، درهم‌تنیدگی برای جفت‌شدگی خطی و غیرخطی به‌صورت تقریبا مشابهی رفتار می‌کنند. اما، با افزایش میانگین تعداد فوتون‌های اولیه درهم‌تنیدگی در یک بازه زمانی واحد، برای مورد خطی دچار فروافت ۵۰٪ی خواهد شد، در حالی که برای جفت‌شدگی وابسته به شدت، درهم‌تنیدگی به‌صورت نسبتا منظمی نوسان می‌کند و کاهش میزان درهم‌تنیدگی کمتر از ۱۵٪ است.

مرجع

[1] M. A. Nielsen, and I. L. Shuang, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge University Press. (2000).

[2] B. Wang, Z. Y. Xu, Z. Q. Chen, and M. Feng, “Non-Markovian effect on the quantum discord,” Phys. Rev. A 81,014101 (2010).

[3] V. I. Man’ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria, “f-Oscillators and Nonlinear Coherent State” Phy. Scripta Vol.55, 528-541, (1997).

[4] X. M. Bai, C. P. Gao, G. Q. Li, N. Liu, J. Q. Liang, “Entanglement dynamic for two spins in an optical cavity-field interaction induced decoherence and coherence revival” Optics Express 25(15), 17051-17065, (2017).

[5] W. K. Wootters, “Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits,” Phys. Rev. Lett. 80, 2245 (1998).

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]