بیست و ششمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و دوازدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه خوارزمی،
تهران، ایران.
۱۵-۱۶ بهمن ۱۳۹۸

رابطه پاشندگی یک بلور فوتونی واقع در موجبر استوانه ای

فرزانه باقر، مسعود رضوانی جلال*

گروه فیزیک و فوتونیک دانشگاه ملایر، ملایر

***rezvanijalal@malayeru.ac.ir**

چکیده – در این مقاله برهمکنش نور با یک قطعه بلور فوتونی یک بعدی واقع در یک موجبر استوانه ای با دیواره های رسانا مورد مطالعه تحلیلی و محاسباتی قرار می گیرد. ابتدا، مدهای قابل انتشار در یک موجبر استوانه ای (با مقطع مستطیلی) و رابطه پاشندگی آن ذکر می گردد. سپس، ضرایب عبور و انعکاس از لایه های تناوبی ضریب شکست (بلور فوتونی) قرار گرفته در موجبر با استفاده از اپتیک ماتریسی به صورت تحلیلی پیدا می شوند. با به دست آمدن ضریب عبور و مقایسه آن با مورد فضای آزاد، تاثیر دیواره های موجبر بر رابطه پاشندگی بلور فوتونی مشخص می گردد. این دو رابطه پاشندگی در فرکانس های خیلی بالاتر از فرکانس قطع مانند هم بوده ولی در فرکانس های نزدیک به آن تفاوت های واضحی با هم دارند.

کلید واژه- بلور فوتونی، عبور و انعکاس نور، موجبر استوانه ای.

Dispersion Relation of a Photonic Crystal in a Cylindrical Waveguide

Farzaneh Bagher, Masoud Rezvani Jalal*

Photonic Group, Department of Physics, Malayer University, Malayer

Abstract- In this paper, interaction of light with a piece of photonic crystal placed in a cylindrical waveguide with conductive walls is studied both analytically and computationally. First, the propagating modes in the waveguide (with square cross-section) and its dispersion relation is mentioned. Then, reflection and transmission coefficients from periodic index layers (i.e. a photonic crystal) within the waveguide are analytically found by the matrix optics. After finding the transmission coefficient and comparing it with that in free space, the effect of waveguide on the dispersion relation of photonic crystal is revealed. These two dispersion relations are the same for frequencies much larger than the cut-off frequency but they have distinct differences for frequencies near to it.

Keywords: Photonic crystal, Dispersion relation, Waveguide.

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]

مقدمه

رابطه پاشندگی ارتباط بین تحول زمانی و مکانی یک موج را به دست می دهد. به عبارت دیگر، با داشتن رابطه پاشندگی می توان ارتباط بین فرکانس موج (که نماینده تحول زمانی است) و عدد موج (یا همان تحول مکانی) را مشخص کرد. بسته به اینکه یک موج (مثلاً موج الکترومغناطیسی) قرار است در چه فضایی (با چه هندسه و ساختاری) منتشر شود رابطه های پاشندگی مختلفی خواهد داشت. برای مثال، نوری که می خواهد در فضای آزاد و یکنواخت با ضریب شکست n حرکت کند دارای رابطه پاشندگی به صورت $\omega=(c/n)k$ خواهد بود. هر چه فضا محدود تر و پیچیده تر باشد روابط پاشندگی نیز بغرنج تر خواهند بود. به عنوان مثال، رابطه پاشندگی موجبر به مراتب از فضای آزاد سخت تر است و اگر عوامل پراکننده ای نیز در داخل آن قرار داشته باشند پیچیدگی مسئله دوچندان خواهد شد. بلورهای فوتونی نیز دارای رابطه پاشندگی مخصوص خود هستند که در آنها باندهای مجاز و ممنوعه اپتیکی دیده می شود [۱].

همانطور که اشاره شد موجبرها رابطه پاشندگی خاص خود را دارند و بلورهای فوتونی نیز همین طور. سوالی بدین صورت می توان مطرح کرد که اگر یک بلور فوتونی در داخل یک موجبر قرار گیرد آنگاه رابطه پاشندگی این ترکیب به چه صورت خواهد بود؟ به عبارت دیگر، قرار گرفتن قطعه ای از بلور فوتونی درون یک موجبر چه تاثیری در رابطه پاشندگی و مدهای قابل انتشار آن خواهد داشت؟ در مراجع به ندرت می توان چنین بحثی را مشاهده کرد [۲]. در مقاله حاضر، یک قطعه بلور فوتونی یک بعدی در داخل موجبر استوانه ای قرار می گیرد و عبور و بازتاب از آن و نیز رابطه پاشندگی ترکیب محاسبه می شود. ارتباط این رابطه پاشندگی با رابطه پاشندگی موجبر و بلور در فضای آزاد نیز مقایسه می گردد.

تئوری و فرمول بندی

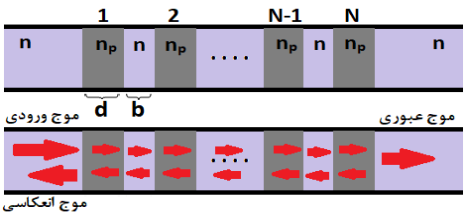
ساده ترین موجبرها، موجبر استوانه ای با دیواره های رسانا است که با محیط یکنواختی پر شده باشد. اگر فرکانس قطع مد مفروض با ω_c نشان داده شود آنگاه عدد موج قابل انتشار این مد (یا همان رابطه پاشندگی) به صورت زیر خواهد بود [۳]:

$$k_z = \frac{n}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_c^2} \qquad (۱)$$

موجبر استوانه ای می تواند مقاطع مختلفی همچون مستطیل و دایره داشته باشد که ساده ترین آنها مقطع مستطیلی است. در موجبر مستطیلی به اضلاع L_x و L_y، میدان ها و فرکانس قطع (برای مد TE) به صورت زیر است [۴].

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 Cos(\frac{n_x\pi}{L_x}x)Cos(\frac{n_y\pi}{L_y}y)e^{ik_z z} \\ \vec{E}_t &= \frac{-i\omega}{(n\omega_c/c)^2}\hat{z}\times\vec{\nabla}_t B_z \qquad (۲) \\ \vec{B}_t &= \frac{ik_z}{(n\omega_c/c)^2}\vec{\nabla}_t B_z \\ \omega_c &= \frac{c}{n}\sqrt{(\frac{n_x\pi}{L_x})^2+(\frac{n_y\pi}{L_y})^2}\ ,\ n_x,n_y=1,2,\dots \end{aligned}$$

که در آنها اندیس t نشان دهنده مولفه های عرضی می باشد. فرض می شود که N تیغه به ضخامت d و ضریب شکست n_p با فاصله b از هم در داخل موجبر قرار گیرند، شکل ۱. به عبارت دیگر یک قطعه بلور فوتونی با تناوب $d+b$ در موجبر قرار داده شده است. حال مد دلخواهی از سمت چپ به آن تابیده می شود. قسمتی از مد بازتاب شده و قسمت دیگری هم به لایه های بلور نفوذ کرده و بعد از رفت و برگشت های متوالی در نهایت از بلور عبور می کند. در شکل ۱ شماتیکی از این فرایند دیده می شود.

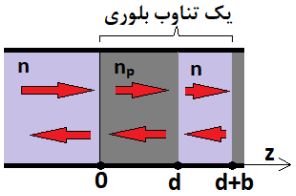


شکل ۱: (بالا) طرح واره ای از موجبر و N لایه قرار گرفته در آن. (پایین) موج فرودی به بلور فوتونی درون موجبر و بازتاب و عبور از از لایه های آن.

برای به دست آوردن ضرایب عبور و بازتاب باید از شرایط مرزی حاکم بر میدان ها استفاده کرد. چون با لایه های تناوبی متعدد مواجه هستیم می توان به اپتیک ماتریسی متوسل شد به این ترتیب که ابتدا ماتریس انتقال یک تناوب بلوری به دست می آید و در نهایت حاصل ضرب ماتریسی همه تناوب ها به عنوان ماتریس بلور فوتونی لحاظ می گردد. در شکل ۲ یک تناوب بلوری و امواج رسیده به مرزهای آن نشان داده شده است.

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]



شکل ۲: یک تناوب بلور فوتونی در موجبر و امواج ورودی و خروجی آن.

موج ها در مرزها و لایه های یک تناوب بلوری با استفاده از روابط (۲) به دست می آیند. اگر دامنه موج فرودی با $B_{0,i}$ و دامنه موجب بازتابی با $B_{0,r}$ نمایش داده شود و دامنه موج راست-رو و چپ-رو در لایه n_p نیز به ترتیب با $B_{0,+}$ و $B_{0,-}$ مشخص گردد آنگاه شرایط مرزی در z=۰ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} &B_{0,i}+B_{0,r}=B_{0,+}+B_{0,-} \\ &k_{z,n}(B_{0,i}-B_{0,r})=k_{z,n_p}(B_{0,+}-B_{0,-}) \end{aligned} \qquad (۳)$$

اگر دامنه موج راست-رو در لایه n با $b_{0,+}$ و موج چپ-رو هم با $b_{0,-}$ نمادگذاری شود آنگاه شرایط مرزی در $z=d$ ایجاد می کند:

$$\begin{aligned} &B_{0,+}e^{ik_{z,n_p}d}+B_{0,-}e^{-ik_{z,n_p}d}=b_{0,+}e^{ik_{z,n}d}+b_{0,-}e^{-ik_{z,n}d} \\ &k_{z,n_p}(B_{0,+}e^{ik_{z,n_p}d}-B_{0,-}e^{-ik_{z,n_p}d})= \\ &k_{z,n}(b_{0,+}e^{ik_{z,n}d}-b_{0,-}e^{-ik_{z,n}d}) \end{aligned} \qquad (۴)$$

با حل این معادلات می توان $b_{0,+}$ و $b_{0,-}$ را به دست آورد. ماتریسی که اینها را به $B_{0,i}$ و $B_{0,r}$ مربوط کند همان ماتریس انتقال یک تناوب بلوری است که به صورت زیر به دست می آید:

$$T_\lambda=\begin{bmatrix} e^{ik_{z,n}b} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z,n}b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{k_{z,n_p}+k_{z,n}}{2k_{z,n}} & \frac{k_{z,n}-k_{z,n_p}}{2k_{z,n}} \\ \frac{k_{z,n}-k_{z,n_p}}{2k_{z,n}} & \frac{k_{z,n_p}+k_{z,n}}{2k_{z,n}} \end{bmatrix}\times \qquad (۵)$$
$$\begin{bmatrix} e^{ik_{z,n_p}d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z,n_p}d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{k_{z,n_p}+k_{z,n}}{2k_{z,n_p}} & \frac{k_{z,n_p}-k_{z,n}}{2k_{z,n_p}} \\ \frac{k_{z,n_p}-k_{z,n}}{2k_{z,n_p}} & \frac{k_{z,n_p}+k_{z,n}}{2k_{z,n_p}} \end{bmatrix}$$

در این حاصلضرب ماتریسی، آخرین ماتریس، مربوط به عبور از مرز n با n_p است، سومین ماتریس، انتشار به اندازه d در محیط n_p را نشان می دهد، دومین ماتریس، عبور از مرز n_p به n است و اولین نیز مربوط به انتشار به طول b در محیط n می باشد. اگر بلور فوتونی در فضای آزاد قرار داشت آنگاه ماتریس انتقال هر تناوب آن نیز دقیقاً مانند رابطه (۵) بود با این تفاوت که به جای k_z ها رابطه پاشندگی معمولی $k_z=(n/c)\omega$ ظاهر می شد [۱]. ماتریس انتقال N تناوب بلوری نیز به صورت توان Nام T_λ خواهد بود. اگر دامنه مد فرودی دارای مقدار "۱" باشد و دامنه موج بازتابی هم با r نمایش داده شود و موج عبوری از بلور نیز t باشد ارتباط بین آنها به شکل زیر خواهد بود.

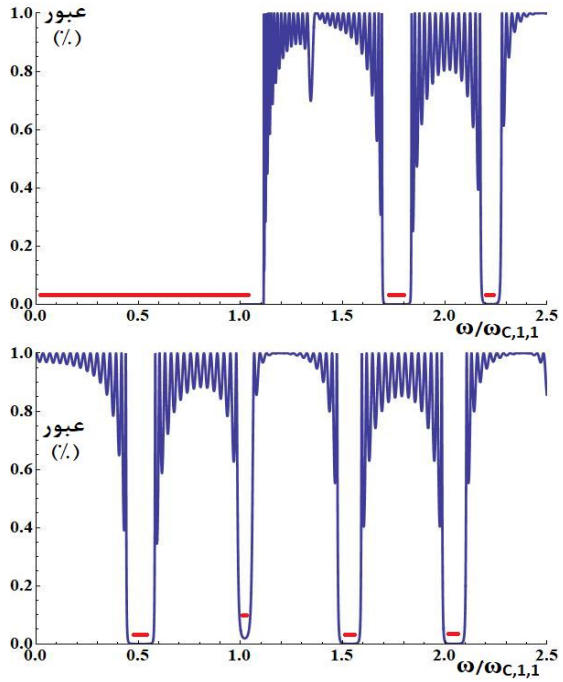
$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}=T_\lambda^N\begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

با حل این معادله، ضرایب انعکاس و عبور r و t به دست می آیند. با استفاده از رابطه زیر نیز رابطه پاشندگی پیدا می شود [۱]:

$$Cos(2\pi\frac{k_z}{d+b})=\mathrm{Re}(\frac{1}{t(\omega)}) \qquad (۷)$$

نتایج محاسبات عددی

برای مثال از یک موجبر مستطیلی با L_x=۱۰ μm و L_y=۲۰ μm استفاده می گردد. تعداد N=۱۵ تناوب از یک بلور فوتونی با n=۱ و n_p=۱/۵ و ضخامت های d=۵ μm و b=۱۰ μm در داخل آن قرار می گیرد. در شکل ۳-بالا ضریب عبور از این قطعه بلور برای پایین ترین مد TE موجبر (یعنی n_x=۱ و n_y=۱) آورده شده است.



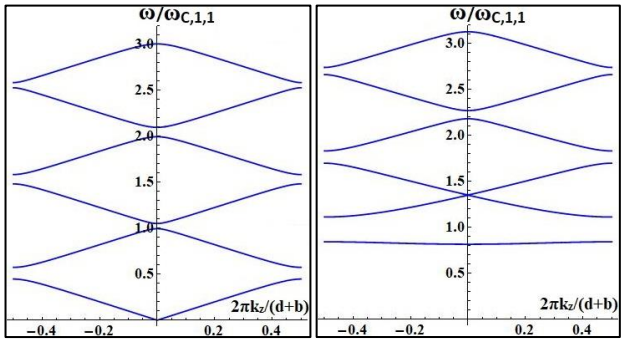
شکل ۳: (بالا) ضریب عبور از قطعه بلور فوتونی واقع در موجبر. (پایین) ضریب عبور از همان بلور در فضای آزاد. پاره خط های قرمز ایست های فرکانسی را مشخص می کنند.

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]

از این نمودارها مشخص است که عملکرد بلور فوتونی در داخل موجبر با فضای آزاد خیلی متفاوت است. البته شباهت هایی هم بین آنها وجود دارد مثلاً هر دو دارای نواحی فرکانسی با عبور صفر (معروف به ایست های فرکانسی) هستند ولی محل و پهنای این ایست ها در آن دو کاملاً فرق دارد. ایست پهنی که در ابتدای نمودار شکل ۳-بالا دیده می شود همان فرکانس قطع موجبر است که انتشاری در فرکانس های کمتر از آن وجود ندارد ولی سایر ایست ها ناشی از بلور فوتونی هستند. نمودارهای مشابه نشان می دهند بسته به اینکه چه مدی در داخل موجبر برای فرود به بلور انتخاب شود آنگاه مکان و پهنای ایست ها به فرکانس قطع آن مد بستگی خواهد داشت در حالیکه برای بلور واقع در فضای آزاد مکان و پهنای آنها مستقل از مد نور فرودی است.

در انتها نیز نمودار پاشندگی بلور فوتونی واقع در موجبر با استفاده از رابطه (۷) محاسبه می گردد. در شکل ۴-راست، نمودار پاشندگی بلور فوتونی داخل موجبر و در شکل ۴-راست نیز نمودار پاشندگی بلور در فضای آزاد ترسیم شده است.



شکل ۴: (راست) نمودار پاشندگی بلور فوتونی قرار گرفته در موجبر. (چپ) نمودار پاشندگی بلور فوتونی در فضای آزاد.

از این نمودارها مشخص است که پاشندگی بلور فوتونی و محل و مقدار گاف های نوری آن متاثر از حضور موجبر است و با فضای آزاد بسیار تفاوت دارد. البته در فرکانس های بالا (همانطور که از شکل ۴ هم تا حدی مشخص است)، نمودار پاشندگی بلور داخل موجبر به پاشندگی بلور فضای آزاد تبدیل می شود.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک قعطه بلور فوتونی در داخل موجبر استوانه ای قرار گرفت و عبور و انعکاس از آن برای مدهای قابل انتشار موجبر به صورت تحلیلی محاسبه شد. نتایج محاسبات در یک مورد عددی نشان داد که برای یک تکّه بلور فوتونی واقع در موجبر ایست های فرکانسی تشکیل می شود که در آنها امکان انتشار و عبور نور وجود ندارد. تاثیر حضور موجبر بر مکان و پهنای های ایست های فرکانسی بلور فوتونی بسیار جالب توجه است. بسته به اینکه چه مد موجبری لحاظ شود (و فرکانس قطع آن چقدر باشد) آنگاه موقعیت و اندازهای ایست ها نیز متفاوت خواهد بود. این در حالی است که مکان و پهنای ایست ها در یک بلور واقع در فضای آزاد به نوع مد انتشاری بستگی ندارد.

اگر کل فضای موجبر را بلور فوتونی گرفته باشد آنگاه یافته های مقاله نشان می دهد که مشخصات گاف فوتونی نیز متاثر از موجبر خواهد بود. به عبارت دیگر، با یک آزادی عمل بسیار بالا می توان صرفاً با قرار دادن بلور فوتونی در یک موجبر اقدام به مهندسی گاف فوتونی آن کرد. بلور فوتونی استفاده شده در اینجا یک بلور یک بعدی بود. استفاده از بلورهای دو بعدی و سه بعدی در داخل موجبر و مطالعه تاثیر موجبر بر گاف اپتیکی آنها جزء کارهای در حال اجرای نویسندگان مقاله می باشد.

سپاسگزاری

از دانشگاه ملایر به خاطر حمایت از این کار قدردانی می گردد.

مرجع‌ها

[۱] صالح، بهاء، *مبانی فوتونیک*، ترجمه: محمدصادق ابریشمیان، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۹۳.

[2] Junghyun Park et al , "High order plasmonic Bragg reflection in the metal-insulator-metal waveguide Bragg grating", OPTICS EXPRESS 16 (1), 413-425, 2008.

[۳] جندقی، حمید؛ رضوانی جلال، مسعود؛ عبدی کیان، علیرضا، "مطالعه محاسباتی تراگسیل و بازتاب در یک موجبر بیضوی"، بیست و پنجمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک، دانشگاه شیراز، ۹-۱۱ بهمن ۱۳۹۷.

[4] J. David Jackson, *Classical Electrodynamics*, p. 359, John Wiley and Sons, Inc, 1998.

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]