بیست و ششمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و دوازدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران.
15-16 بهمن ۱۳۹۸

پراش باریکه‌ی گوسی از ساختارهای دو بعدی جدایی‌پذیر در مختصات قطبی

راضیه عزیزخانی، داود حبری و سیف‌اله رسولی

دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان

چکیده - پراش نور تخت از ساختارهای دوره‌ای دو بعدی در دستگاه مختصات قطبی شامل توری‌های شعاعی دامنه‌ای و فازی و توری‌های دو بعدی شعاعی موسوم به ساختارهای سمتی دوره‌ای بسل-پایه پیش از این مورد بررسی قرار گرفته است. در مورد توری‌های شعاعی، نقش پراش، باریکه‌ی فرش شعاعی است که در انتشار شکل ناورادایی دارد. همچنین شروط داشتن اثر تالبوت برای ساختارهای دو بعدی در مختصات قطبی تعیین شده و نشان داده شده است که ساختارهای سمتی دوره‌ای بسل-پایه دارای خودتصویر هستند. در این مقاله به دو روش نظری و شبیه‌سازی انتشار، پراش باریکه‌ی گوسی از ساختارهای دو بعدی جدایی‌پذیر در مختصات قطبی بررسی می‌شود. نشان داده می‌شود با انتخاب بهینه شعاع کمر باریکه گوسی می‌توان طرح شدت پراش را به شکل گلبرگ-گونه داشت که در تله‌اندازی چندگانه ذرات کاربرد دارد.

کلید واژه- پراش، توری‌های شعاعی، باریکه گوسی

Diffraction of a Gaussian beam from 2D structures separable in the polar coordinates

Razie Azizkhani, Davud Hebri, and Saifollah Rasouli

Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran

Abstract- Diffraction of a plane wave from 2D periodic structures in the polar coordinates including amplitude and phase radial gratings and 2D Bessel-based radial structures has been previously studied. For radial gratings, the diffraction pattern is a radial carpet beam that has an invariant shape under propagation. It was also shown that the 2D Bessel-based radial structures have self-images. In this paper, with theoretical work and simulation, the diffraction of a Gaussian beam from 2D separable structures in the polar coordinates are investigated. It is shown that by optimally selecting the radius of the Gaussian beam waist it is possible to form a petal-like diffraction intensity pattern that is applicable to multiple particle trapping.

Keywords: diffraction, radial gratings, Gaussian beam

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-19]

۱- مقدمه

پراش نور از توری‌های متداول که دارای خطوط موازی هم هستند کاربردهای متعددی در اپتیک پیدا کرده‌اند. نوع جدیدی از توری‌ها که ساختار دوره‌ای در راستای سمتی در دستگاه قطبی دارند توری‌های شعاعی نامیده می‌شوند. پراش نور تخت از توری‌های شعاعی دامنه‌ای و فازی باریکه‌ی فرش شعاعی تولید می‌کند که در انتشار شکل ناورادایی دارد[۲-۱]. اثر تالبوت برای ساختارهای دو بعدی در مختصات قطبی، با افزودن وابستگی بسل-پایه در امتداد شعاعی به یک توری شعاعی، مهیا می‌شود [۳]. در این مقاله به دو روش نظری و شبیه‌سازی انتشار پراش باریکه‌ی گوسی از ساختارهای دو بعدی جدایی‌پذیر در مختصات قطبی بررسی می‌شود. نشان داده می‌شود با انتخاب بهینه شعاع کمر باریکه گوسی می‌توان طرح شدت پراش را به شکل گلبرگ-گونه داشت که در تله‌اندازی چندگانه ذرات کاربرد دارد.

۲- انتشار یک باریکه‌ی نوری با دامنه‌ی مختلط اولیه‌ی جدایی‌پذیر در مختصات قطبی

ابتدا انتشار یک باریکه‌ی نوری با دامنه‌ی مختلط اولیه‌ی جدایی‌پذیر در مختصات قطبی را بررسی می‌کنیم[۱]. فرض کنیم $\psi(r',\theta';0)$ دامنه‌ی مختلط میدان نوری در $z=0$ و $\psi(r,\theta;\mathrm{z})$ دامنه‌ی مختلط میدان نوری بعد از انتشار به اندازه‌ی z باشد، که در آن (r,θ) و (r',θ') مولفه‌های مختصات قطبی می‌باشند. جدایی-پذیر بودن دامنه مختلط در $z=0$ به صورت زیر بیان می-شود:

$$\psi(r',\theta';0)=f(r')g(\theta'). \qquad (۱)$$

از آنجا که تابع $g(\theta')$ به طور ذاتی دوره‌ای با دوره تناوب 2π است، می‌تواند بر حسب سری فوریه بسط داده شود:

$$g(\theta)=g_0+\sum_{n=1}^{+\infty}g_n\cos(n\theta). \qquad (۲)$$

که در آن g_n ضریب سری فوریه است که با توجه به شکل $g(\theta')$ تعیین می‌شود. می‌توان نشان داد که دامنه‌ی مختلط میدان نوری بعد از انتشار به اندازه‌ی z از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود[۱و۴]:

$$\psi(r,\theta;\mathrm{z})= \qquad (۳)$$

$$h\left\{g_0\mathrm{H}_0\left\{f(\mathrm{r})\mathrm{e}^{i\alpha r^2}\right\}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-\mathrm{i})^n\mathrm{H}_n\left\{f(\mathrm{r})\mathrm{e}^{i\alpha r^2}\right\}g_n\cos(n\theta)\right\}.$$

که در آن $h=\frac{e^{i(kz+\alpha r^2)}}{i\lambda z}$ ، $\alpha=\frac{\pi}{\lambda z}$ ، λ طول موج باریکه نوری و $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ عدد موج است. علاوه بر این H_n تبدیل هنکل مرتبه n است.

۱-۲- پراش باریکه‌ی گوسی از ساختارهای دو بعدی جدایی‌پذیر در مختصات قطبی

اکنون نتایج بدست آمده را برای پراش باریکه‌ی گوسی از ساختارهای شعاعی به کار می‌بریم. دامنه‌ی مختلط یک باریکه گوسی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\psi(r,\theta;-0)=\exp\left[-(\frac{r}{w})^2\right], \qquad (۴)$$

که در آن w پارامتر شعاع باریکه است. این باریکه به یک ساختار شعاعی با تابع عبور

$$t(\theta)=t_0+\sum_{n=1}^{+\infty}t_n\cos(n\theta), \qquad (۵)$$

تابیده می‌شود. بنابراین دامنه مختلط بلافاصله بعد از ساختار به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\psi(r,\theta,+0)=t(\theta)\psi(r,\theta,-0), \qquad (۶)$$

که -0 و $+0$ به ترتیب بلافاصله قبل و بعد از ساختار را مشخص می‌کند. بنابراین داریم:

$$\psi(r,\theta,+0)=\exp\left[-(\frac{r}{\omega})^2\right]t(\theta). \qquad (۷)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود $\psi(r,\theta,+0)$ در مختصات قطبی جدایی‌پذیر است و با مقایسه‌ی معادله ۱ و ۷ نتیجه

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-19]

می‌گیریم:

$$f(r)=\exp\left[-(\frac{r}{\omega})^2\right], \quad (۸)$$

و $g(\theta)=t(\theta)$ و در نتیجه $g_n=t_n$. با جایگزین کردن $f(r)$ در معادله ۳ بدست می‌آوریم:

$$\psi(r,\theta;z)=h\times \quad (۹)$$
$$\left\{t_0\mathrm{H}_0\{\mathrm{e}^{-\beta r^2}\}+\sum_{n=1}^{+\infty}t_n\cos(\mathrm{n}\theta)(-\mathrm{i})^n\mathrm{H}_n\{\mathrm{e}^{-\beta r^2}\}\right\}.$$

که در آن $\beta=\frac{1}{\omega^2}-i\alpha$ است. حالت $n=0$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H_0\left\{e^{-\beta r^2}\right\}=\frac{\pi}{\beta}e^{-\frac{\pi^2\rho^2}{\beta}}. \quad (۱۰)$$

همچنین حالت $n\neq 0$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{H}_n\{e^{-\beta r^2}\}=\frac{\Gamma_n}{\rho\beta^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\pi^2\rho^2}{2\beta}}\mathrm{M}_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}(\frac{\pi^2\rho^2}{\beta}), \quad (۱۱)$$

که در آن M تابع ویتاکر را نشان می‌دهد و

$$\Gamma_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}, \quad (۱۲)$$

که درآن Γ تابع گاما را نشان می‌دهد. با جایگذاری روابط ۱۰ و ۱۱ در معادله‌ی ۹ بدست می‌آوریم:

(۱۳)

$$\psi(r,\theta,z)=\psi_N e^{-R}\left\{t_0+\frac{e^{\frac{R}{2}}}{\sqrt{R}}\sum_{n=1}^{+\infty}W_n(\mathrm{R})\,\mathrm{t}_n\cos(n\theta)\right\}.$$

که در آن $R=\frac{\pi^2\rho^2}{\beta}=\frac{1}{\beta}(\frac{\pi r}{\lambda z})^2$ یک پارامتر مختلط بدون بعد و $\psi_N=-i(\frac{\alpha}{\beta})e^{i(ar^2+kz)}$ است و همچنین تابع W_n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_n(R)=(-\mathrm{i})^n\Gamma_n\mathrm{M}_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}(R). \quad (۱۴)$$

در ادامه این نتیجه را برای پراش میدان نزدیک یک باریکه‌ی گوسی از یک ساختار شعاعی دامنه‌ای و فازی با نمایه‌ی باینری به‌کار می‌بریم.

۳- نتایج تحلیلی

در این‌کار پراش باریکه گوسی از ساختار شعاعی باینری دامنه‌ای و فازی با ضریب گشودگی‌های مختلف را بررسی می‌کنیم. تابع عبور توری شعاعی دامنه‌ای باینری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$t(\theta)=\frac{1}{2}[1+Bi(\theta)], \quad (۱۵)$$

که در آن تابع $Bi(\theta)$ یک تابع باینری با ضریب گشودگی h است که بین ۱- و ۱+ متغیر است:

$$Bi(\theta)=Sign\left[\cos(m\theta)-\cos(\pi h)\right], \quad (۱۶)$$

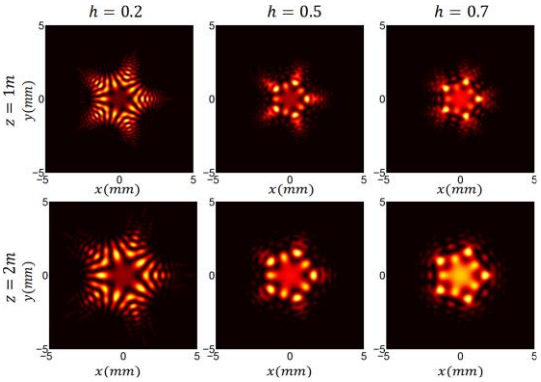
که در آن m تعداد پره های توری را مشخص می‌کند و $Sign$ نشان‌دهنده تابع علامت است. بسط فوریه‌ی تابع عبور فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$t(\theta)=h+\sum_{q=1}^{\infty}2hSinc(qh)\cos(qm\theta), \quad (۱۷)$$

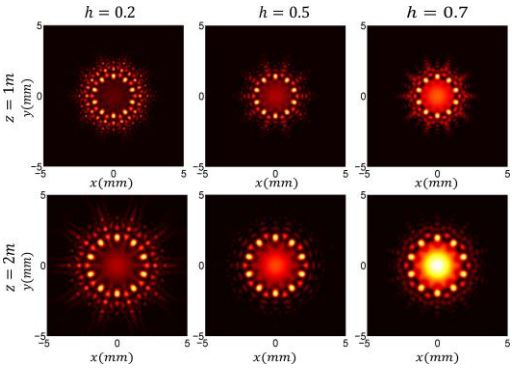
که در آن $Sinc(x)=\sin(\pi x)/(\pi x)$. با مقایسه‌ی روابط ۱۷ و ۵ نتیجه می‌گیریم که $t_0=h$ و $t_{n=qm}=2hSinc(qh)$ و بقیه ضرایب صفرند. با جایگذاری این ضرایب در رابطه‌ی ۱۳ دامنه‌ی مختلط نور پراشیده بدست می‌آید. شکل ۱ و ۲ الگوهای پراش یک باریکه‌ی گوسی را از ساختارهای شعاعی دامنه‌ای باینری با ضرایب گشودگی مختلف در دو فاصله‌ی مختلف نشان می‌دهند.

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-19]



شکل ۱: الگوهای پراش یک باریکه گوسی با $w = 2mm$ از ساختارهای شعاعی دامنه‌ای باینری با تعداد پره $m = 5$ و ضرایب گشودگی ۰٫۲ و ۰٫۵ و ۰٫۷ در فاصله‌های $z = 1m$ (ردیف اول) و $z = 2m$ (ردیف دوم) از ساختارهای شعاعی.



شکل ۲: مشابه شکل ۱ برای تعداد پره $m = 10$.

تابع عبور ساختار شعاعی فازی باینری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$t(\theta) = \exp\left[i\gamma Bi(\theta)\right], \qquad (۱۸)$$

که در آن γ دامنه‌ی تغییرات فاز را نشان می‌دهد. با نوشتن سری فوریه این تابع عبور و مقایسه با رابطه‌ی ۱۸ خواهیم دید که $t_0 = he^{i\gamma} + (1-h)e^{-i\gamma}$ و $t_{n=qm} = 4ih\sin(\gamma)Sinc(qh)$ و با جایگذاری این ضرایب در رابطه‌ی ۱۳ دامنه‌ی مختلط نور پراشیده از ساختار شعاعی فازی باینری بدست می‌آید. شکل ۳ و ۴ الگوهای پراش یک باریکه‌ی گوسی را از ساختارهای شعاعی فازی باینری با ضرایب گشودگی مختلف در دو فاصله‌ی مختلف نشان می‌دهند. برای ساختار شعاعی فازی باینری، ضریب گشودگی بیش از ۰٫۵ حالت فیزیکی جدیدی را توصیف نمی‌کند.

شکل ۳: الگوهای پراش یک باریکه گوسی با $w = 2mm$ از ساختارهای شعاعی فازی باینری با $m = 5$ و $\gamma = \pi / 2$ و ضرایب گشودگی ۰٫۲ ۰٫۴ و ۰٫۵ در فاصله‌های $z = 1m$ (ردیف اول) و $z = 2m$ (ردیف دوم) از ساختارهای شعاعی.

شکل ۴: مشابه شکل ۳ برای تعداد پره $m = 10$.

نتیجه‌گیری

با انتخاب گشودگی ۰٫۵ و انتخاب بهینه شعاع کمر باریکه گوسی می‌توان طرح شدت پراش را به شکل گلبرگ-گونه بدست آورد که در تله‌اندازی چندگانه ذرات کاربرد دارد.

مراجع

[1] S. Rasouli, A. M. Khazaei, and D. Hebri, “Talbot carpet at the transverse plane produced in the diffraction of plane wave from amplitude radial gratings,” J. Opt. Soc. Am. A Vol. 35, pp. 55–64, 2018.

[2] S. Rasouli, A. M. Khazaei, and D. Hebri, “Radial carpet beams: A class of nondiffracting, accelerating, and self-healing beams,” Physical Review A 97, 003844 (14 pages), 2018.

[3] D. Hebri, M. Bagheri, and S. Rasouli, “Talbot effect of azimuthally periodic Bessel-based structures,” Opt. Lett. 44(17), 2019.

[4] D. Hebri, S. Rasouli, and M. Yeganeh, “Intensity-based measuring of the topological charge alteration by the diffraction of vortex beams from amplitude sinusoidal radial gratings,” J. Opt. Soc. Am. B Vol. 35, pp. 724-730, 2018.

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-19]