

بیست و ششمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران و دوازدهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران. ۱۳۹۸ بهمن ۱۳۹۸



# پروتکل تکرارگر کوانتومی با مدارهای ابررسانا بدون اندازهگیری حالت بِل

سهیلا سلیمیان، مهناز قاسمی و محمد کاظم توسلی گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

چکیده –توزیع درهم تنیدگی در فواصل طولانی در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. هدف ما در این مقاله طراحی یک پروتکل جدید برای تکرارگر کوانتومی در حضور کیوبیتهای ابررسانا برای توزیع درهم تنیدگی بین دو کیوبیت ابررسانا است که در فاصله زیادی از هم قرار دارند. بدین منظور، چهار جفت کیوبیت درهم تنیده جدا از هم (n,n+1) که 1,3,5,7 = n، را در نظر می گیریم. با ایجاد برهم کنش بین کیوبیتهای ابررسانای مجاور جدا از هم (۲، ۳) و (۶، ۷) در حضور میدان مغناطیسی خارجی و اعمال اندازه گیری مناسب، درهم تنیدگی بین کیوبیتهای جداپذیر (۱، ۴) و (۵، ۱) ایجاد میشود. در نهایت، با ایجاد برهم کنش بین کیوبیتهای (۴، ۵) درهم تنیدگی بین کیوبیتهای هدف (۱، ۸) پس از اعمال اندازه گیری مناسب توزیع میشود. میزان درهم تنیدگی توسط سنجه تلاقی مورد بررسی قرار می گیرد و احتمال موفقیت حالتهای درهم تنیده توزیع شده محاسبه می شود. مشاهده می شود که تغییرات هر دو پارامتر بالا به صورت نوسانی است امّا هر دو دارای مقادیر قابل قبول و رضایت بخشی هستند. کلید واژه- احتمال موفقیت، تکرارگر کوانتومی، تلاقی، درهم تنیدگی، کیوبیتهای است امّا هر دو دارای مقادیر قابل قبول و رضایت بخشی هستند.

# Quantum repeater protocol with superconducting circuits without Bell state measurement

Soheila Salimian<sup>1</sup>, Mahnaz Ghasemi<sup>2</sup>, Mohammad Kazem Tavassoly<sup>3</sup> <sup>1</sup><u>s.salimian@stu.yazd.ac.ir;</u> <sup>2</sup><u>m.ghasemi@stu.yazd.ac.ir;</u> <sup>3</sup><u>mktavassoly@yazd.ac.ir</u>

Optic and Laser Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract- The long-distance entanglement distribution is an important issue in quantum information processing. Our aim in this paper is to design a new protocol of quantum repeater by superconducting qubits to distribute entanglement between two superconducting qubits which are far from each other. So, we consider four pairs of entangled qubits (n,n+1) where n=1,3,5,7. Entanglement between each adjacent separable qubits (1,4) and (5,8) is created by performing interactions in the presence of an external magnetic field between the separable superconducting qubits (2,3) and (6,7) and operating proper measurement. Finally, the entanglement is distributed between two target qubits (1,8) by performing interaction between qubits (4,5) and operating proper quantum measurements. The entanglement is considered via concurrence and the success probability of the distributed entangled states is calculated. The behavior of the above two-mentioned parameters is periodic, however, they possess acceptable and satisfactory values.

Keywords: Success probability, Quantum repeater, Concurrence, Entanglement, Superconducting qubits.

#### مقدمه

درهم تنیدگی در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی [۱-۳] و ار تباطات کوانتومی [۴] نقش اصلی و اساسی دارد. درهم تنیدگی در فاصلههای طولانی توسط تکرارگرهای کوانتومی که نخستین بار توسط بریگل و همکاران پیشنهاد گردید [۵]، توزیع می گردد. در این پروتکل ابتدا فواصل طولانی به بخشهای کوچک تر این ویژگی در فاصله مورد نظر مستقر می شود. تاکنون، پروتکلهای بسیاری برای تکرارگر کوانتومی مورد بررسی قرار گرفته است [۶-۹]. هدف ما در این مقاله پیشنهاد یک پروتکل جدید برای تکرارگر کوانتومی با استفاده از کیوبیتهای ابررسانا فرآیندهای کوانتومی در زمانهای کوتاه تری انجام می شوند و همچنین سهولت طراحی پردازندههای کوانتومی بزرگ مقیاس از مزایای کیوبیتهای ابررسانا است [۱۰].

### پروتکل تکرارگر کوانتومی

در این مقاله هدف ما توزیع درهمتنیدگی بین کیوبیت (۱ و ۸) است که در ابتدا و انتهای یک ردیف ۸ تایی از کیوبیتهای ابررسانا قرار گرفتهاند. در ابتدا کیوبیتهای ابررسانا به صورت چهار جفت کیوبیت درهمتنیده مجزا از هم در نظر گرفته میشود، به نحوی که کیوبیتهای n و 1+n با یکدیگر درهمتنیده هستند (n = 1, 3, 5, 7 با یک یک از جفتهای درهمتنیدهی مجاور، درهمتنیدگی وجود ندارد. سپس با ایجاد برهم کنش بین کیوبیتهای (۲، ۳) و (۶، ۷) در حضور میدان مغناطیسی خارجی و اعمال اندازه گیری مناسب، در مرحله نهایی، با ایجاد برهم کنشی دیگر بین کیوبیتهای (۴، ۵) کیوبیتهای هدف (۱، ۸) و (۵، ۸) ایجاد میشود. ۵) کیوبیتهای هدف (۱، ۸) پس از اعمال اندازه گیری مناسب به حالت درهمتنیده منتقل میشوند. اکنون به بررسی چهار در هرمتنیده (۱، ۳) پرداخته میشود. حالت جفت کیوبیتهای در همتنیده (۱، ۲) به صورت زیر نوشته میشود:

$$\left|\psi\right\rangle_{n,n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|e,g\right\rangle - \left|g,e\right\rangle\right)_{n,n+1},\tag{1}$$

که  $\langle e \rangle$  و  $\langle g \rangle$  به ترتیب نشان دهنده حالت برانگیخته و پایه کیوبیتهای ابررسانا هستند. در ادامه فرض میکنیم که کیوبیتهای (۲ و ۳) به هم متصل و با هامیلتونی زیر توصیف شوند [۱۱]:

$$H/\hbar = \sum_{j=2}^{3} \frac{\omega_j}{2} \sigma_j^{z} + g(\sigma_2^+ + \sigma_2^-)(\sigma_3^+ + \sigma_3^-), \tag{(Y)}$$

در هامیلتونی (۲)،  $\sigma_{j}^{z,\pm}$  و  $\sigma_{j}^{z,\pm}$ ، (j = 2, 3)، به ترتیب بسامد گذار کیوبیت jام و عملگرهای پائولی مربوط به کیوبیت هستند. همچنین، g ثابت جفتشدگی بین کیوبیتهای (۲ و ۳) است. حال دو میدان مغناطیسی با بسامدهای،

$$\omega_j = \omega_{0j} + \varepsilon_j \sin(\nu_j t + \varphi_j), \qquad (r)$$

بر روی کیوبیتهای (۲ و ۳) اعمال می شود که  $\varphi_0$  میانگین بسامد و  $z_i$ ،  $v_j$  و  $\phi_i$  به ترتیب دامنه، بسامد و فاز میدان اعمال شده هستند. دو عملگر یکانی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$U_{1} = \exp[-i\sum_{j=2}^{3}\omega_{0,j}t],$$
  

$$U_{2} = \exp[i\sum_{j=2}^{3}\sigma_{j}^{z}\frac{\alpha_{j}}{2}\cos(\nu_{j}t+\varphi_{j})],$$
(f)

که  $\alpha_j = \varepsilon_j / v_j$  سپس  $U_1 \times U_2$  را بر روی هامیلتونی (۲) به صورت  $\alpha_j = \varepsilon_j / v_j$  اثر میدهیم و در نهایت به هامیلتونی زیر دست مییابیم:

$$H_{I} = g \sigma_{2}^{+} \sigma_{3}^{-} \exp[-i\alpha_{2}\cos(\nu_{2}t+\varphi_{2})] \\ \times \exp[i\alpha_{3}\cos(\nu_{3}t+\varphi_{3})-i\Delta t] + \text{H.C.}$$
 ( $\Delta$ )

که 
$$\Delta = \omega_{03} - \omega_{02}$$
 با فرض  $\Delta = \nu$  و با استفاده از بسط که

$$\exp[i\alpha\cos(\nu t+\varphi)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\alpha) \exp[im(\nu t+\varphi)],$$
(8)

که در آن  $J_m$  چندجملهایهای بسل مرتبه اوّل هستند، می توان هامیلتونی را با استفاده از تقریب موج چرخان به صورت ساده شده زیر به دست آورد:

$$\mathbf{H}_{eff} = \lambda (\sigma_2^+ \sigma_3^- + \sigma_2^- \sigma_3^+), \qquad (\mathbf{Y})$$

در رابطه (۸)  $\lambda = g J_1(\alpha_3) J_0(\alpha_2) e^{i(\varphi_3 + \pi/2)}$  (۸) در رابطه مؤثر است که با تغییر نسبت دامنه به بسامد میدانهای اعمال

شده می توان اندازه جفت شدگی را تنظیم کرد. با توجه به رابطه (۱) حالت اولیه کیوبیت های (۴–۱) با رابطه زیر بیان می شود:

$$\begin{split} \left|\psi(\mathbf{t}=0)\right\rangle_{1,2,3,4} &= \frac{1}{2}(\left|e,g\right\rangle_{1,4}\left|g,e\right\rangle_{2,3} - \left|e,e\right\rangle_{1,4}\left|g,g\right\rangle_{2,3} \\ &-\left|g,g\right\rangle_{1,4}\left|e,e\right\rangle_{2,3} + \left|g,e\right\rangle_{1,4}\left|e,g\right\rangle_{2,3}). \end{split}$$
(A)

با اثر دادن هامیلتونی مؤثر (۸) بر روی حالت اولیه کیوبیتهای (۱-۴) متناظر با رابطه (۹) و حل معادله شرودینگر وابسته به زمان، حالت کیوبیتها در زمان t به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{split} \left| \psi(\mathbf{t}) \right\rangle_{1,2,3,4} &= L_{1}(\mathbf{t}) \left| \mathbf{e}, \mathbf{g} \right\rangle_{1,4} \left| g, \mathbf{e} \right\rangle_{2,3} + L_{2}(\mathbf{t}) \left| \mathbf{e}, \mathbf{g} \right\rangle_{1,4} \left| \mathbf{e}, \mathbf{g} \right\rangle_{2,3} \\ &+ L_{3}(\mathbf{t}) \left| g, \mathbf{e} \right\rangle_{1,4} \left| \mathbf{e}, \mathbf{g} \right\rangle_{2,3} + L_{4}(\mathbf{t}) \left| g, \mathbf{e} \right\rangle_{1,4} \left| g, \mathbf{e} \right\rangle_{2,3} \\ &- L_{5}(\mathbf{t}) \left| e, \mathbf{e} \right\rangle_{1,4} \left| g, g \right\rangle_{2,3} - L_{6}(\mathbf{t}) \left| g, g \right\rangle_{1,4} \left| e, \mathbf{e} \right\rangle_{2,3}, \end{split}$$
(9)

که در آن ضرایب به صورت زیر به دست میآیند:

$$\begin{split} L_1(t) &= L_3(t) = \frac{-i}{2} \sin(\lambda t), \quad L_2(t) = L_4(t) = \frac{1}{2} \cos(\lambda t), \\ L_5(t) &= L_6(t) = -\frac{1}{2}. \end{split}$$

اکنون با اعمال اندازه گیری کوانتومی مناسب روی حالت کیوبیتهای (۲ و ۳) در رابطه (۹) به صورت <sub>2.3</sub>(e, ۹ و و <sup>g</sup>, e, ۶)، کیوبیتهای (۱ و ۴) به ترتیب به دو حالت درهم تنیده زیر منتقل می شوند:

$$\begin{split} \left|\psi'(t)\right\rangle_{1,4} &= \frac{1}{\sqrt{P_{1,4}(t)}} (L_2(t) \left| e, g \right\rangle_{1,4} + L_3(t) \left| g, e \right\rangle_{1,4}), \\ \left|\psi'(t)\right\rangle_{1,4} &= \frac{1}{\sqrt{P_{1,4}'(t)}} (L_1(t) \left| e, g \right\rangle_{1,4} + L_4(t) \left| g, e \right\rangle_{1,4}), \end{split}$$
(11)

احتمال موفقیت برای دو حالت (۱۱) به ترتیب به صورت زیر به دست میآید:

$$P_{1,4}(t) = \left|L_{2}(t)\right|^{2} + \left|L_{3}(t)\right|^{2}, \qquad P_{1,4}'(t) = \left|L_{1}(t)\right|^{2} + \left|L_{4}(t)\right|^{2}, \qquad (17)$$

میزان درهمتنیدگی بین کیوبیتهای (۱ و ۴)، متناظر با حالتهای  $(1)_{1,4}$  و  $(1)_{1,4}$  به ترتیب به صورت زیر حاصل می شود:

$$C(t) = \frac{2\left|L_{2}^{*}(t)L_{3}(t)\right|}{P_{1,4}(t)}, \quad C'(t) = \frac{2\left|L_{1}^{*}(t)L_{4}(t)\right|}{P_{1,4}'(t)}.$$
 (17)

نمودارهای مربوط به احتمال موفقیت و تلاقی به ترتیب در نمودارهای ۱ و ۲ رسم شده است. با توجه به نمودار ۱ مشاهده میشود که احتمال موفقیت برای هر دو حالت، یکسان و در

همهی زمانها برابر با مقدار ثابت ۰/۲۵ است که مقدار قابل قبولی است [۱۲]. با توجه به نمودار ۲ مشاهده می شود که میزان درهم تنیدگی برای هر دو حالت به دست آمده یکسان و منطبق بر یکدیگر است. همچنین، هر دو دارای رفتار نوسانی هستند و بیشینه مقدار آنها در زمانهای معینی به یک می رسد که نشان می دهد بیشینه درهم تنیدگی در زمانهایی دستر س پذیر است.





نمودار ۲. نمودار تلاقی بر حسب *t*t، بر اساس رابطه (۱۳) که (C(t) با خط پیوسته و (t) کا با خطچین نمایش داده شدهاند.

تمام این مراحل را برای کیوبیتهای (۵–۸) نیز تکرار میکنیم و نتایج زیر به دست میآید:

$$\left|\psi(t)\right\rangle_{5,8} = \left|\psi(t)\right\rangle_{1,4}, \qquad \left|\psi'(t)\right\rangle_{5,8} = \left|\psi'(t)\right\rangle_{1,4}. \qquad (14)$$

تاکنون، با انجام فرآیندهای بالا حالتهای درهمتنیده برای کیوبیتهای (۱ و ۴) و همچنین برای کیوبیتهای (۵ و ۸) به دست آمد. در ادامه، برای توزیع درهمتنیدگی بین کیوبیتهای (۱ و ۸)، هامیلتونی مؤثری مشابه (۸) برای کیوبیتهای (۴ و ۵) در زمان  $t < \tau$  بر روی کیوبیتهای ابررسانای (۴ و ۵) اثر داده می شود. بنابراین، چهار حالت درهمتنیده برای کیوبیتهای (۱، ۴، ۵ و ۸) به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{split} \left| \psi(\tau) \right\rangle_{_{1,4,5,8}}^{i} &= M_{_{1}}^{i}(\tau) \left| \mathbf{e}, \mathbf{g} \right\rangle_{_{1,8}} \left| \mathbf{g}, \mathbf{e} \right\rangle_{_{4,5}} + M_{_{2}}^{i}(\tau) \left| \mathbf{e}, \mathbf{g} \right\rangle_{_{1,8}} \left| \mathbf{e}, \mathbf{g} \right\rangle_{_{4,5}} \\ &+ M_{_{3}}^{i}(\tau) \left| \mathbf{g}, \mathbf{e} \right\rangle_{_{1,8}} \left| \mathbf{e}, \mathbf{g} \right\rangle_{_{4,5}} + M_{_{4}}^{i}(\tau) \left| \mathbf{g}, \mathbf{e} \right\rangle_{_{1,4}} \left| \mathbf{g}, \mathbf{e} \right\rangle_{_{4,5}} \\ &- M_{_{5}}^{i}(\tau) \left| \mathbf{e}, \mathbf{e} \right\rangle_{_{1,8}} \left| \mathbf{g}, \mathbf{g} \right\rangle_{_{4,5}} - M_{_{6}}^{i}(\tau) \left| \mathbf{g}, \mathbf{g} \right\rangle_{_{1,8}} \left| \mathbf{e}, \mathbf{e} \right\rangle_{_{4,5}}, \end{split}$$

که (i=1, 2, 3, 4) که (i=1, 2, 3, 4) به ترتیب متناظر با حالتهای اولیه  $|\psi(t)\rangle_{1,4} \otimes |\psi'(t)\rangle_{5,8} \cdot |\psi'(t)\rangle_{1,4} \otimes |\psi(t)\rangle_{5,8} = |\psi(t)\rangle_{5,8}$ 

### این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

و  $|\Psi'(t)\rangle_{5,8} \otimes |\Psi'(t)\rangle_{5,8} \otimes |\Psi'(t)\rangle_{1,4}$  است. لازم به ذکر است که در رابطه (۱۵) ضرایب (1,2,3,4,5,6) (i=1,2,3,4, j=1,2,3,4,5,6) به صورت تحلیلی به دست آمده است ولی به دلیل کمبود جا از آوردن آنها در مقاله خودداری کردهایم. بعد از اعمال دو اندازه گیری با حالتهای خودداری او  $|P,e\rangle_{4,5}$  روی حالت (۱۵)، کیوبیتهای (۱ و ۸) به ترتیب به حالتهای درهمتنیده زیر منتقل می شوند:

$$\begin{split} \left|\psi(\tau)\right|_{_{1,8}}^{i} &= \frac{1}{\sqrt{P_{1,8}(\tau)}} (M_{2}^{i}(\tau) \left| e, g\right\rangle_{_{1,8}} + M_{3}^{i}(\tau) \left| g, e\right\rangle_{_{1,8}}), \\ \left|\psi'(\tau)\right\rangle_{_{1,8}}^{i} &= \frac{1}{\sqrt{P_{1,8}'(\tau)}} (M_{1}^{i}(\tau) \left| e, g\right\rangle_{_{1,8}} + M_{4}^{i}(\tau) \left| g, e\right\rangle_{_{1,8}}), \end{split}$$
(19)

احتمال موفقیت حالتهای (۱۶) با روابط زیر داده می شود:  $P_{1,s}^{i}(\tau) = |\mathbf{M}_{2}^{i}(\tau)|^{2} + |\mathbf{M}_{3}^{i}(\tau)|^{2}, P_{1,8}^{\prime i}(\tau) = |\mathbf{M}_{1}^{i}(\tau)|^{2} + |\mathbf{M}_{4}^{i}(\tau)|^{2}.$  (۱۷) مشابه قبل، میزان درهم تنیدگی بین کیوبیتهای (۱ و ۸)، متناظر با حالتهای  $\sum_{1,s}^{i}(\tau)\psi|$  و  $\sum_{1,s}^{i}(\tau)\psi|$  با استفاده از سنجه تلاقی به ترتیب به صورت زیر به دست می آید:



نمودار ۳: نمودار تلاقی و احتمال موفقیت بر حسب  $\lambda \tau$  برای  $I = \mathcal{A}$  بر اساس رابطههای (۱۷) و (۱۸). در نمودارها (r)  $P_{I,s}^{i}(\tau) \to C^{i}(\tau)$  با خط پیوسته و (r)  $C^{i}(\tau) \to C^{i}(\tau)$ با خطچین نمایش داده شدهاند.

نمودارهای احتمال موفقیت و سنجه تلاقی برای این چهار حالت محاسبه و مشاهده شد که بیشترین مقدار تلاقی و احتمال موفقیت مربوط به حالت <sub>5.8</sub>((t)) هست که در نمودار ۳ رسم شده است. مشاهده می شود که احتمال موفقیت دارای

مقدار قابل قبولی است. همچنین، بیشینه مقدار تلاقی در زمانهایی به یک میرسد که نشان دهنده بیشینهشدن درهمتنیدگی است.

#### نتيجهگيرى

در این مقاله یک پروتکل جدید برای تکرارگرهای کوانتومی با استفاده از کیوبیتهای ابررسانا پیشنهاد کردیم. بدین منظور با در نظر گرفتن چهار جفت کیوبیت درهم تنیده ابررسانا و ایجاد برهم کنش بین کیوبیتهای جدا از هم و انجام اندازه گیریهای مناسب روی (۲ و ۳)، (۶ و ۷) و در نهایت (۴ و ۵)، درهم تنیدگی مناسب روی (۲ و ۳)، (۶ و ۷) و در نهایت (۴ و ۵)، درهم تنیدگی بین کیوبیتهای دور از هم (۱ و ۸) توزیع شد. در این بررسی بهدلیل ایجاد برهم کنش بین کیوبیتها، اندازه گیری حالت بهدلیل ایجاد برهم کنش بین کیوبیتها، اندازه گیری حالت کوانتومی، جایگزین اندازه گیری حالت بِل به منظور تبادل درهم تنیدگی شد که یکی از مزیتهای پروتکل طراحی شده است [۱۳]. با استفاده از سنجه تلاقی، میزان درهم تنیدگی ایجاد شده بین کیوبیتهای هدف و هم چنین احتمال موفقیت به دست آوردن حالتها مورد مطالعه قرار گرفت و مشاهده شد که هر دو دارای رفتار نوسانی هستند و دسترسی به بیشینه مقدار دارای رفتار نوسانی هستند و دسترسی به بیشینه مقدار درهم تنیدگی امکان پذیر است. هم چنین، احتمال موفقیت در

#### مرجعها

- Curty M, Lewenstein M and Lütkenhaus N 2004 Phys. Rev. Lett. 92 217903.
- [2] Wang C, Kurtsiefer C, Weinfurter H and Burchard B 2005 J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 39 37.
- [3] Pan J W, Simon C, Brukner C and Zeilinger A 2001 Nature 410 1067.
- [4] Han C, Zhou Z-W and Guo G-C 2006 J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 39 1677.
- [5] Briegel H-J, Dur W, Cirac J I and Zoller P 1998 Phys. Rev. Lett. 81 5932.
- [6] Azuma K, Tamaki K and Lo H-K 2015 Nat. Commun. 6 6787.
  [7] Kok P, Williams C P and Dowling J P 2003 Phys. Rev. A 68
- [8] Ghasemi M and Tavassoly M K 2019 J. Phys. B-At. Mol. Opt. 52
- [8] Gnasemi M and Tavassoly M K 2019 J. Phys. B-At. Mol. Opt. 52 085502.
- [9] Das S and Saifur Rahman Md. "Design of a Quantum-Repeater using Quantum-Circuits and Benchmarking its Performance on an IBM Quantum-Computer."
- [10] Devoret M H and Schoelkopf R J 2013 Science 339 1169.
- [11] Li X, Ma Y, Han J, Chen T, Xu Y, Cai W, Wang H, Song YP, Xue ZY, Yin ZQ and Sun L 2018 Phys. Rev. Appl. 10 054009.
- [12] Ghasemi M and Tavassoly M K 2018 Europhys. Lett. 123 24002.
- [13] Yang M, Song W and Cao Z L 2005 Phys. Rev. A 71 034312.

۵۶

## این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.