بیست و ششمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و دوازدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه خوارزمی،
تهران، ایران.
۱۵-۱۶ بهمن ۱۳۹۸

پروتکل تکرارگر کوانتومی با مدارهای ابررسانا بدون اندازه‌گیری حالت بِل

سهیلا سلیمیان، مهناز قاسمی و محمد کاظم توسلی
گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

چکیده –توزیع درهم‌تنیدگی در فواصل طولانی در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. هدف ما در این مقاله طراحی یک پروتکل جدید برای تکرارگر کوانتومی در حضور کیوبیت‌های ابررسانا برای توزیع درهم‌تنیدگی بین دو کیوبیت ابررسانا است که در فاصله زیادی از هم قرار دارند. بدین منظور، چهار جفت کیوبیت درهم‌تنیده جدا از هم $(n,n+1)$ که $n=1,3,5,7$، را در نظر می‌گیریم. با ایجاد برهم‌کنش بین کیوبیت‌های ابررسانای مجاور جدا از هم (۲، ۳) و (۶، ۷) در حضور میدان مغناطیسی خارجی و اعمال اندازه‌گیری مناسب، درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های جداپذیر (۱، ۴) و (۵، ۸) ایجاد می‌شود. در نهایت، با ایجاد برهم‌کنش بین کیوبیت‌های (۴، ۵) درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های هدف (۱، ۸) پس از اعمال اندازه‌گیری مناسب توزیع می‌شود. میزان درهم‌تنیدگی توسط سنجه تلاقی مورد بررسی قرار می‌گیرد و احتمال موفقیت حالت‌های درهم‌تنیده توزیع شده محاسبه می‌شود. مشاهده می‌شود که تغییرات هر دو پارامتر بالا به صورت نوسانی است امّا هر دو دارای مقادیر قابل قبول و رضایت‌بخشی هستند.

کلید واژه- احتمال موفقیت، تکرارگر کوانتومی، تلاقی، درهم‌تنیدگی، کیوبیت‌های ابررسانا.

Quantum repeater protocol with superconducting circuits without Bell state measurement

Soheila Salimian[1], Mahnaz Ghasemi[2], Mohammad Kazem Tavassoly[3]
[1]s.salimian@stu.yazd.ac.ir; [2]m.ghasemi@stu.yazd.ac.ir;
[3]mktavassoly@yazd.ac.ir

Optic and Laser Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract- The long-distance entanglement distribution is an important issue in quantum information processing. Our aim in this paper is to design a new protocol of quantum repeater by superconducting qubits to distribute entanglement between two superconducting qubits which are far from each other. So, we consider four pairs of entangled qubits $(n,n+1)$ where $n=1,3,5,7$. Entanglement between each adjacent separable qubits (1,4) and (5,8) is created by performing interactions in the presence of an external magnetic field between the separable superconducting qubits (2,3) and (6,7) and operating proper measurement. Finally, the entanglement is distributed between two target qubits (1,8) by performing interaction between qubits (4,5) and operating proper quantum measurements. The entanglement is considered via concurrence and the success probability of the distributed entangled states is calculated. The behavior of the above two-mentioned parameters is periodic, however, they possess acceptable and satisfactory values.

Keywords: Success probability, Quantum repeater, Concurrence, Entanglement, Superconducting qubits.

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]

مقدمه

درهم‌تنیدگی در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی [۱-۳] و ارتباطات کوانتومی [۴] نقش اصلی و اساسی دارد. درهم‌تنیدگی در فاصله‌های طولانی توسط تکرارگرهای کوانتومی که نخستین بار توسط بریگل و همکاران پیشنهاد گردید [۵]، توزیع می‌گردد. در این پروتکل ابتدا فواصل طولانی به بخش‌های کوچک‌تر تقسیم می‌شوند و در نهایت با ایجاد درهم‌تنیدگی بین بخش‌ها، این ویژگی در فاصله مورد نظر مستقر می‌شود. تاکنون، پروتکل‌های بسیاری برای تکرارگر کوانتومی مورد بررسی قرار گرفته است [۶-۹]. هدف ما در این مقاله پیشنهاد یک پروتکل جدید برای تکرارگر کوانتومی با استفاده از کیوبیت‌های ابررسانا است. قابلیت ایجاد برهم‌کنش‌های قوی که در نتیجه آن فرآیندهای کوانتومی در زمان‌های کوتاه‌تری انجام می‌شوند و همچنین سهولت طراحی پردازنده‌های کوانتومی بزرگ مقیاس از مزایای کیوبیت‌های ابررسانا است [۱۰].

پروتکل تکرارگر کوانتومی

در این مقاله هدف ما توزیع درهم‌تنیدگی بین کیوبیت (۱ و ۸) است که در ابتدا و انتهای یک ردیف ۸ تایی از کیوبیت‌های ابررسانا قرار گرفته‌اند. در ابتدا کیوبیت‌های ابررسانا به صورت چهار جفت کیوبیت درهم‌تنیده مجزا از هم در نظر گرفته می‌شود، به نحوی که کیوبیت‌های n و n+1 با یکدیگر درهم‌تنیده هستند (n = 1, 3, 5, 7) ولی بین هیچ یک از جفت‌های درهم‌تنیده‌ی مجاور، درهم‌تنیدگی وجود ندارد. سپس با ایجاد برهم‌کنش بین کیوبیت‌های (۲، ۳) و (۶، ۷) در حضور میدان مغناطیسی خارجی و اعمال اندازه‌گیری مناسب، درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های (۱، ۴) و (۵، ۸) ایجاد می‌شود. در مرحله نهایی، با ایجاد برهم‌کنشی دیگر بین کیوبیت‌های (۴، ۵) کیوبیت‌های هدف (۱، ۸) پس از اعمال اندازه‌گیری مناسب به حالت درهم‌تنیده منتقل می‌شوند. اکنون به بررسی چهار کیوبیت (۱، ۲، ۳، ۴) پرداخته می‌شود. حالت جفت کیوبیت‌های درهم‌تنیده (۱، ۲) و (۳، ۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\psi\rangle_{n,n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e,g\rangle-|g,e\rangle\right)_{n,n+1}, \qquad (۱)$$

که $|e\rangle$ و $|g\rangle$ به ترتیب نشان دهنده حالت برانگیخته و پایه کیوبیت‌های ابررسانا هستند. در ادامه فرض می‌کنیم که کیوبیت‌های (۲ و ۳) به هم متصل و با هامیلتونی زیر توصیف شوند [۱۱]:

$$H/\hbar=\sum_{j=2}^{3}\frac{\omega_j}{2}\sigma_j^z+g(\sigma_2^+ +\sigma_2^-)(\sigma_3^+ +\sigma_3^-), \qquad (۲)$$

در هامیلتونی (۲)، ω_j و $\sigma_j^{z,\pm}$، (j = 2, 3)، به ترتیب بسامد گذار کیوبیت j-ام و عملگرهای پائولی مربوط به کیوبیت هستند. هم‌چنین، g ثابت جفت‌شدگی بین کیوبیت‌های (۲ و ۳) است. حال دو میدان مغناطیسی با بسامدهای،

$$\omega_j=\omega_{0j}+\varepsilon_j\sin(\nu_j t+\varphi_j), \qquad (۳)$$

بر روی کیوبیت‌های (۲ و ۳) اعمال می‌شود که ω_{0j} میانگین بسامد و ε_j، ν_j و φ_j به ترتیب دامنه، بسامد و فاز میدان اعمال‌شده هستند. دو عملگر یکانی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U_1=\exp[-i\sum_{j=2}^{3}\omega_{0,j}t],$$
$$U_2=\exp[i\sum_{j=2}^{3}\sigma_j^z\frac{\alpha_j}{2}\cos(\nu_j t+\varphi_j)], \qquad (۴)$$

که $\alpha_j=\varepsilon_j/\nu_j$. سپس $U=U_1\times U_2$ را بر روی هامیلتونی (۲) به صورت $U^\dagger HU$ اثر می‌دهیم و در نهایت به هامیلتونی زیر دست می‌یابیم:

$$H_I=g\,\sigma_2^+\sigma_3^-\exp[-i\alpha_2\cos(\nu_2 t+\varphi_2)]\times\exp[i\alpha_3\cos(\nu_3 t+\varphi_3)-i\,\Delta t]+\text{H.C.} \qquad (۵)$$

که $\Delta=\omega_{03}-\omega_{02}$. با فرض $\Delta=\nu$ و با استفاده از بسط

$$\exp[i\alpha\cos(\nu t+\varphi)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^m J_m(\alpha)\exp[im(\nu t+\varphi)], \qquad (۶)$$

که در آن J_m چندجمله‌ای‌های بسل مرتبه اوّل هستند، می‌توان هامیلتونی را با استفاده از تقریب موج چرخان به صورت ساده شده زیر به دست آورد:

$$H_{eff}=\lambda(\sigma_2^+\sigma_3^- +\sigma_2^-\sigma_3^+), \qquad (۷)$$

در رابطه (۸) $\lambda=g\,J_1(\alpha_3)J_0(\alpha_2)e^{i(\varphi_3+\pi/2)}$ ثابت جفت‌شدگی مؤثر است که با تغییر نسبت دامنه به بسامد میدان‌های اعمال

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]

شده می‌توان اندازه جفت‌شدگی را تنظیم کرد. با توجه به رابطه (۱) حالت اولیه کیوبیت‌های (۴-۱) با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$|\psi(t=0)\rangle_{1,2,3,4}=\frac{1}{2}(|e,g\rangle_{1,4}|g,e\rangle_{2,3}-|e,e\rangle_{1,4}|g,g\rangle_{2,3} -|g,g\rangle_{1,4}|e,e\rangle_{2,3}+|g,e\rangle_{1,4}|e,g\rangle_{2,3}). \quad (۸)$$

با اثر دادن هامیلتونی مؤثر (۸) بر روی حالت اولیه کیوبیت‌های (۴-۱) متناظر با رابطه (۹) و حل معادله شرودینگر وابسته به زمان، حالت کیوبیت‌ها در زمان t به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle_{1,2,3,4}=&L_1(t)|e,g\rangle_{1,4}|g,e\rangle_{2,3}+L_2(t)|e,g\rangle_{1,4}|e,g\rangle_{2,3}\\&+L_3(t)|g,e\rangle_{1,4}|e,g\rangle_{2,3}+L_4(t)|g,e\rangle_{1,4}|g,e\rangle_{2,3}\\&-L_5(t)|e,e\rangle_{1,4}|g,g\rangle_{2,3}-L_6(t)|g,g\rangle_{1,4}|e,e\rangle_{2,3},\end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن ضرایب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$L_1(t)=L_3(t)=\frac{-i}{2}\sin(\lambda t),\quad L_2(t)=L_4(t)=\frac{1}{2}\cos(\lambda t),\quad L_5(t)=L_6(t)=-\frac{1}{2}. \quad (۱۰)$$

اکنون با اعمال اندازه‌گیری کوانتومی مناسب روی حالت کیوبیت‌های (۲ و ۳) در رابطه (۹) به صورت $|e,g\rangle_{2,3}$ و $|g,e\rangle_{2,3}$، کیوبیت‌های (۱ و ۴) به ترتیب به دو حالت درهم‌تنیده زیر منتقل می‌شوند:

$$|\psi(t)\rangle_{1,4}=\frac{1}{\sqrt{P_{1,4}(t)}}(L_2(t)|e,g\rangle_{1,4}+L_3(t)|g,e\rangle_{1,4}),\quad |\psi'(t)\rangle_{1,4}=\frac{1}{\sqrt{P'_{1,4}(t)}}(L_1(t)|e,g\rangle_{1,4}+L_4(t)|g,e\rangle_{1,4}), \quad (۱۱)$$

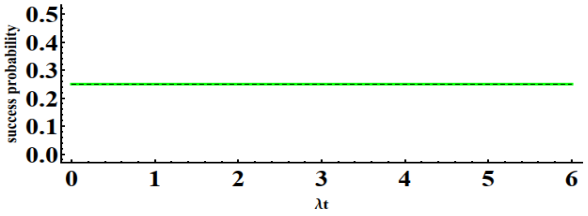
احتمال موفقیت برای دو حالت (۱۱) به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_{1,4}(t)=|L_2(t)|^2+|L_3(t)|^2,\quad P'_{1,4}(t)=|L_1(t)|^2+|L_4(t)|^2, \quad (۱۲)$$

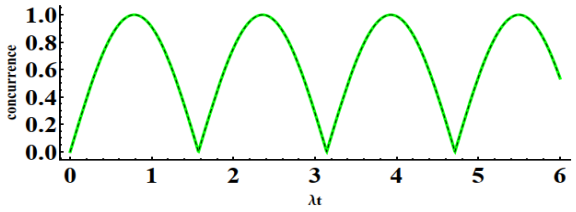
میزان درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های (۱ و ۴)، متناظر با حالت‌های $|\psi(t)\rangle_{1,4}$ و $|\psi'(t)\rangle_{1,4}$ با استفاده از سنجه تلاقی به ترتیب به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$C(t)=\frac{2|L_2^*(t)L_3(t)|}{P_{1,4}(t)},\quad C'(t)=\frac{2|L_1^*(t)L_4(t)|}{P'_{1,4}(t)}. \quad (۱۳)$$

نمودارهای مربوط به احتمال موفقیت و تلاقی به ترتیب در نمودارهای ۱ و ۲ رسم شده است. با توجه به نمودار ۱ مشاهده می‌شود که احتمال موفقیت برای هر دو حالت، یکسان و در همه‌ی زمان‌ها برابر با مقدار ثابت ۰/۲۵ است که مقدار قابل قبولی است [۱۲]. با توجه به نمودار ۲ مشاهده می‌شود که میزان درهم‌تنیدگی برای هر دو حالت به دست آمده یکسان و منطبق بر یکدیگر است. همچنین، هر دو دارای رفتار نوسانی هستند و بیشینه مقدار آن‌ها در زمان‌های معینی به یک می‌رسد که نشان می‌دهد بیشینه درهم‌تنیدگی در زمان‌هایی دسترس‌پذیر است.



نمودار ۱: نمودار احتمال موفقیت بر حسب λt، بر اساس رابطه (۱۲) که $P(t)$ با خط پیوسته و $P'(t)$ با خط‌چین نمایش داده شده‌اند.



نمودار ۲. نمودار تلاقی بر حسب λt، بر اساس رابطه (۱۳) که $C(t)$ با خط پیوسته و $C'(t)$ با خط‌چین نمایش داده شده‌اند.

تمام این مراحل را برای کیوبیت‌های (۵-۸) نیز تکرار می‌کنیم و نتایج زیر به دست می‌آید:

$$|\psi(t)\rangle_{5,8}=|\psi(t)\rangle_{1,4},\qquad |\psi'(t)\rangle_{5,8}=|\psi'(t)\rangle_{1,4}. \quad (۱۴)$$

تاکنون، با انجام فرآیندهای بالا حالت‌های درهم‌تنیده برای کیوبیت‌های (۱ و ۴) و هم‌چنین برای کیوبیت‌های (۵ و ۸) به دست آمد. در ادامه، برای توزیع درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های (۱ و ۸)، هامیلتونی مؤثری مشابه (۸) برای کیوبیت‌های (۴ و ۵) در زمان $\tau>t$ بر روی کیوبیت‌های ابررسانای (۴ و ۵) اثر داده می‌شود. بنابراین، چهار حالت درهم‌تنیده برای کیوبیت‌های (۱، ۴، ۵ و ۸) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}|\psi(\tau)\rangle^{i}_{1,4,5,8}=&M^{i}_{1}(\tau)|e,g\rangle_{1,8}|g,e\rangle_{4,5}+M^{i}_{2}(\tau)|e,g\rangle_{1,8}|e,g\rangle_{4,5}\\&+M^{i}_{3}(\tau)|g,e\rangle_{1,8}|e,g\rangle_{4,5}+M^{i}_{4}(\tau)|g,e\rangle_{1,4}|g,e\rangle_{4,5}\\&-M^{i}_{5}(\tau)|e,e\rangle_{1,8}|g,g\rangle_{4,5}-M^{i}_{6}(\tau)|g,g\rangle_{1,8}|e,e\rangle_{4,5},\end{aligned} \quad (۱۵)$$

که (i=1, 2, 3, 4) به ترتیب متناظر با حالت‌های اولیه $|\psi(t)\rangle_{1,4}\otimes|\psi'(t)\rangle_{5,8}$، $|\psi'(t)\rangle_{1,4}\otimes|\psi(t)\rangle_{5,8}$ $|\psi(t)\rangle_{1,4}\otimes|\psi(t)\rangle_{5,8}$

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]

و $|\psi'(t)\rangle_{5,8}\otimes|\psi'(t)\rangle_{1,4}$ است. لازم به ذکر است که در رابطه (۱۵) ضرایب $M_j^i(\tau)$ (i=1, 2, 3, 4, j=1, 2, 3, 4, 5, 6) به صورت تحلیلی به دست آمده است ولی به دلیل کمبود جا از آوردن آن‌ها در مقاله خودداری کرده‌ایم. بعد از اعمال دو اندازه‌گیری با حالت‌های $|e,g\rangle_{4,5}$ و $|g,e\rangle_{4,5}$ روی حالت (۱۵)، کیوبیت‌های (۱ و ۸) به ترتیب به حالت‌های درهم‌تنیده زیر منتقل می‌شوند:

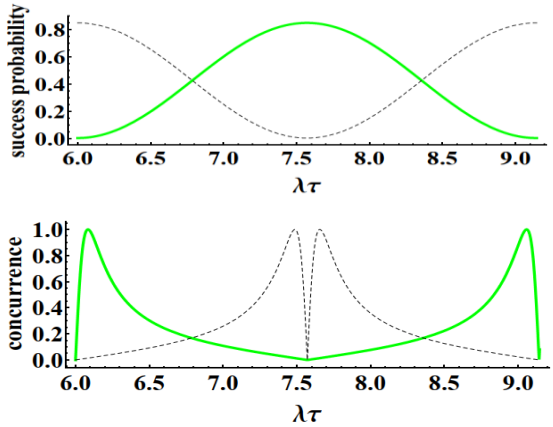
$$|\psi(\tau)\rangle_{1,8}^{i}=\frac{1}{\sqrt{P_{1,8}(\tau)}}(M_2^i(\tau)\,|e,g\rangle_{1,8}+M_3^i(\tau)\,|g,e\rangle_{1,8}),$$
$$|\psi'(\tau)\rangle_{1,8}^{i}=\frac{1}{\sqrt{P'_{1,8}(\tau)}}(M_1^i(\tau)\,|e,g\rangle_{1,8}+M_4^i(\tau)\,|g,e\rangle_{1,8}),\qquad(۱۶)$$

احتمال موفقیت حالت‌های (۱۶) با روابط زیر داده می‌شود:

$$P_{1,8}^{i}(\tau)=|M_2^i(\tau)|^2+|M_3^i(\tau)|^2,\quad P'^{i}_{1,8}(\tau)=|M_1^i(\tau)|^2+|M_4^i(\tau)|^2.\qquad(۱۷)$$

مشابه قبل، میزان درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های (۱ و ۸)، متناظر با حالت‌های $|\psi(\tau)\rangle_{1,8}^{i}$ و $|\psi'(\tau)\rangle_{1,8}^{i}$ با استفاده از سنجه تلاقی به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C^i(\tau)=\frac{2|M_2^i(\tau)^*M_3^i(\tau)|}{P_{1,8}^{i}(\tau)},\qquad C'^{i}(\tau)=\frac{2|M_1^i(\tau)^*M_4^i(\tau)|}{P'^{i}_{1,8}(\tau)}.\qquad(۱۸)$$



نمودار ۳: نمودار تلاقی و احتمال موفقیت بر حسب $\lambda\tau$ برای $\hbar=1$، بر اساس رابطه‌های (۱۷) و (۱۸). در نمودارها $P_{1,8}^{i}(\tau)$، $C^i(\tau)$ با خط پیوسته و $P'^{i}_{1,8}(\tau)$، $C'^{i}(\tau)$ با خط‌چین نمایش داده شده‌اند.

نمودارهای احتمال موفقیت و سنجه تلاقی برای این چهار حالت محاسبه و مشاهده شد که بیشترین مقدار تلاقی و احتمال موفقیت مربوط به حالت $|\psi(t)\rangle_{1,4}\otimes|\psi(t)\rangle_{5,8}$ هست که در نمودار ۳ رسم شده است. مشاهده می‌شود که احتمال موفقیت دارای مقدار قابل قبولی است. هم‌چنین، بیشینه مقدار تلاقی در زمان‌هایی به یک می‌رسد که نشان دهنده بیشینه‌شدن درهم‌تنیدگی است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک پروتکل جدید برای تکرارگرهای کوانتومی با استفاده از کیوبیت‌های ابررسانا پیشنهاد کردیم. بدین منظور با در نظر گرفتن چهار جفت کیوبیت درهم‌تنیده ابررسانا و ایجاد برهم‌کنش بین کیوبیت‌های جدا از هم و انجام اندازه‌گیری‌های مناسب روی (۲ و ۳)، (۶ و ۷) و در نهایت (۴ و ۵)، درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های دور از هم (۱ و ۸) توزیع شد. در این بررسی به‌دلیل ایجاد برهم‌کنش بین کیوبیت‌ها، اندازه‌گیری حالت کوانتومی، جایگزین اندازه‌گیری حالت بِل به منظور تبادل درهم‌تنیدگی شد که یکی از مزیت‌های پروتکل طراحی شده است [۱۳]. با استفاده از سنجه تلاقی، میزان درهم‌تنیدگی ایجاد شده بین کیوبیت‌های هدف و هم‌چنین احتمال موفقیت به دست آوردن حالت‌ها مورد مطالعه قرار گرفت و مشاهده شد که هر دو دارای رفتار نوسانی هستند و دسترسی به بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی امکان‌پذیر است. هم‌چنین، احتمال موفقیت در دست‌یافتن به حالت‌ها دارای مقادیر قابل قبولی است.

مرجع‌ها

[1] Curty M, Lewenstein M and Lütkenhaus N 2004 Phys. Rev. Lett. **92** 217903.
[2] Wang C, Kurtsiefer C, Weinfurter H and Burchard B 2005 J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39** 37.
[3] Pan J W, Simon C, Brukner C and Zeilinger A 2001 Nature **410** 1067.
[4] Han C, Zhou Z-W and Guo G-C 2006 J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39** 1677.
[5] Briegel H-J, Dur W, Cirac J I and Zoller P 1998 Phys. Rev. Lett. **81** 5932.
[6] Azuma K, Tamaki K and Lo H-K 2015 Nat. Commun. **6** 6787.
[7] Kok P, Williams C P and Dowling J P 2003 Phys. Rev. A **68** 022301.
[8] Ghasemi M and Tavassoly M K 2019 J. Phys. B-At. Mol. Opt. **52** 085502.
[9] Das S and Saifur Rahman Md. "Design of a Quantum-Repeater using Quantum-Circuits and Benchmarking its Performance on an IBM Quantum-Computer."
[10] Devoret M H and Schoelkopf R J 2013 Science **339** 1169.
[11] Li X, Ma Y, Han J, Chen T, Xu Y, Cai W, Wang H, Song YP, Xue ZY, Yin ZQ and Sun L 2018 Phys. Rev. Appl. **10** 054009.
[12] Ghasemi M and Tavassoly M K 2018 Europhys. Lett. **123** 24002.
[13] Yang M, Song W and Cao Z L 2005 Phys. Rev. A **71** 034312.

این مقاله درصورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-18]