بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

بررسی تابش چرنکوف نسبیتی در حضور محیط دی الکتریک مغناطیده

مریم محمدی خشوئی

نانو فیزیک، دانشگاه زنجان

چکیده – در این مقاله به بررسی تابش چرنکوف نسبیتی در حضور محیط دی الکتریک مغناطیده همگن سه بعدی پرداخته می شود . گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی محیط به صورت توابع مختلطی از فرکانس که روابط کرامرز-کرونیک را ارضا می کند. فرض می شوند هامیلتونی جدید برهم کنش را که متفاوت از حالت غیرنسبیتی آن است با استفاده از پتانسیل برداری کوانتیزه شده و عملگر میدان ذره که از کوانتش مرتبه دوم به دست آمده معرفی می شود. با استفاده از رابطه احتمال گذار از قاعده طلایی فرمی آهنگ اتلاف انرژی حاصل از این تابش را محاسبه می شود.

کلید واژه- آهنگ اتلاف انرژی، تابش چرنکوف نسبتی، قاعده طلایی فرمی.

Relativistic Cerenkov Radiation in a Magneto-Dielectric media

Maryam Mohammadi K.

Zanjan University

Abstract- In this paper relativistic Cerenkov radiation was studied in a 3-D magneto-dielectric medium.The dielectric function permeability of the medium are assumed to satisfy Kramers-Kronig equations.It is introduced the new intraction Hamiltonian which is different from Hamiltonian term in non- relativistic state based on quantized electromagnetic field and second quantization method.it is calculated the losing energy longitudinal with using the transition probability term in the Fermi"s golden rule.

Keywords: Cerenkov radiation, Fermie's golden rule.

۱- مقدمه

برای اولین بار تابش چرنکوف در تحقیقات مواد رادیواکتیویته مشاهده شده بود. چرنکوف نشان داد منشاء این تابش ، الکترون پرانرژی است که در محیط مادی با سرعتی بیش از سرعت نور در آن محیط حرکت و طی این فرآیند فوتون گسیل می کند. برای بررسی تابش چرنکوف سیستم را متشکل از یک الکترون در حال حرکت به جرم و بار الکتریکی در حال برهم کنش با میدان الکترومغناطیسی در محیطی دی الکتریک مغناطیده در نظر گرفته می شود. یعنی فرض می شود که الکترون قبل از گسیل فوتونی به اندازه حرکت ، دارای اندازه حرکت $\hbar(p+k)$ باشد. به دلیل اینکه برخی از پدیده ها از جمله تابش چرنکوف در خلاء امکان پذیر نیست. لذا در این مقاله به بررسی کوانتش میدان در محیط مادی پرداخته می شود. هر محیط مادی توسط تابع دی الکتریک $\varepsilon(r,\omega)$ و تابع مغناطیدگی $k(r,\omega)$ توصیف می شود. اصل علیت ایجاب می کند که هر دو تابعی مختلط از فرکانس باشند[۲]. قسمت حقیقی آن خاصیت پاشندگی و قسمت موهومی آن خاصیت اتلافی محیط را موجب می شود. این دو قسمت با روابط کرامرز- کرونیگ به هم وابسته اند. ضریب شکست مختلط در این محیط به صورت زیر تعریف می شود:[۲]

$$n\left(\boldsymbol{r},\omega\right)=\varepsilon\left(\boldsymbol{r},\omega\right)\mu\left(\boldsymbol{r},\omega\right) \qquad (۱)$$

که در آن $\varepsilon(r,\omega),\mu(r,\omega)$ به ترتیب پذیرفتاری مغناطیسی و گذردهی الکتریکی محیط نامیده می‌شوند.

در این مقاله با استفاده از میدان الکترومغناطیسی کوانتیزه شده و کوانتش مرتبه دوم(کوانتش عملگر میدان ذره)آهنگ اتلاف انرژی در واحد طول که در آن الکترون با سرعت نسبیتی حرکت می کند محاسبه می شود.

۲- کوانتش میدان الکترومغناطیسی

در گذار از الکترودینامیک کلاسیک به الکترودینامیک کوانتومی اولین گام کوانتیزه کردن میدان است. روشهای متفاوتی برای کوانتش میدانهای الکترومغناطیسی وجود دارد. از آن جمله می توان کوانتیزه کردن میدان بر حسب توابع مد، استفاده از معادلات اویلر- لاگرانژ و تابع گرین را نام برد .

در این مقاله برای کوانتش میدان با تلفیق معادلات ماکسول در پیمانه کولنی و پتانسیل اسکالر صفر، معادله موج را برای پتانسیل برداری می توان به دست آورد. برای حل معادله با استـفاده از تبدیل فوریه پتانسـیل برداری را در فضای اندازه حرکت محاسبه و به یک معادله جبری تبدیل می شود. پس از به دست آوردن پتانسیل برداری آن را به دو مولفه طولی و عرضی تقسیم می کنیم.اما به دلیل آنکه عبارت مولفه طولی برای حالت مغناطیده و غیر مغناطیده یکسان است در بررسی تابش چرنکوف نسبیتی در حضور محیط دی الکتریک جاذب و مغناطیده تنها پتانسیل عرضی را مورد توجه قرار داده که به صورت زیر نوشته می شود[۱]:

(۲)

$$\hat{\boldsymbol{A}}^{T}(\boldsymbol{r},t)=\left(\frac{\hbar}{8\pi^{4}\varepsilon_{0}}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}d\omega\int d^{3}\boldsymbol{k}$$
$$\sum_{s,s'}\left\{\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_i(\omega)}\delta_{s,s'}\hat{\boldsymbol{f}}^{e}_{s'}(\boldsymbol{k},\omega)+\boldsymbol{k}c\sqrt{\left|\kappa_i(\omega)\right|}\varepsilon_{s,s'}\hat{\boldsymbol{f}}^{m}_{s'}(\boldsymbol{k},\omega)}{k^{2}c^{2}\kappa(\omega)-\omega^{2}\varepsilon(\omega)}\right\}$$
$$\times\tilde{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{k})exp\left[-i\left(\omega t-\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}\right)\right]-H.c$$

رابطه جابه‌جایی دو عملگر بوزونی میدان الکتریکی و مغناطیسی ، با فرض $\lambda,\lambda'=e,m$ به شکل زیر هستند[۱].

$$\left[\hat{\boldsymbol{f}}_{\lambda\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{k},\omega),\,\hat{\boldsymbol{f}}_{\lambda'\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{k}',\omega')\right]=0 \qquad (۳)$$
$$\left[\hat{\boldsymbol{f}}_{\lambda\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{k},\omega),\,\hat{\boldsymbol{f}}^{+}_{\lambda'\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{k}',\omega')\right]=\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\delta(\omega-\omega')\delta_{\boldsymbol{ij}}$$

قابل ذکر است که پتانسیل برداری عرضی بالا در روابط جابه جایی کانونیک صدق می کند که شرط کوانتش میدان است

(۴)

$$\left[\hat{\boldsymbol{A}}^{T}_{\alpha}(\boldsymbol{r},t),\,-\varepsilon_{0}\hat{\boldsymbol{E}}^{T}_{\beta}(\boldsymbol{r}',t)\right]=i\hbar\delta^{T}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

۳- کوانتش مرتبه دوم

می توان میدان تابشی را با خواص ذره‌ای توصیف کرد. این مطلب ایده‌ای خواهد بود برای آنکه میدان تابشی الـکترون را نیز کوانتیزه شود که به آن کوانتش مرتبه دوم

می گویند. بدین منظور از معادله دیراک که نسبیتی است، شروع می-شود. سپس با استفاده از معادله ویژه مقداری انرژی، ویژه مقادیر آن محاسبه می شود و براساس ویژه مقادیر به دست آمده میدان تابشی الکترون بسط داده می شود. ضرایب بسط در واقع عملگرهایی خواهند بود که مربوط به خلق یا نابودی الکترون می باشند. $\hat{\boldsymbol{b}}_{\lambda}(\boldsymbol{p},t)$ عملگر بوزونی فنا و همچنین $\hat{\boldsymbol{b}}_{\lambda}^{+}(\boldsymbol{p},t)$ عملگر بوزونی خلق الکترونی با تکانه $\boldsymbol{p}$ نامیده و در نهایت $\boldsymbol{\psi}$ و $\boldsymbol{\psi}^{+}$ کوانتیزه می‌شوند و با تعمیم آن به حالت پیوسته سه بعدی به شکل زیر در می آیند[۲]

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\lambda}\int d^{3}\boldsymbol{p}\,\hat{\boldsymbol{b}}_{\lambda}(\boldsymbol{p},t)\psi_{\lambda}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) \qquad (۵)$$

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}^{+}(\boldsymbol{r},t)=\sum_{\lambda}\int d^{3}\boldsymbol{p}\,\hat{\boldsymbol{b}}_{\lambda}^{+}(\boldsymbol{p},t)\psi_{\lambda}^{+}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) \qquad (۶)$$

که در آن:

$$\psi_{\lambda}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{u}_{\lambda}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})\,e^{i\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}} \qquad (۷)$$

روابط پادجابه‌جایی آنها نیز به صورت زیر است [۲]

$$\left[\hat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{p},t),\hat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{p}',t)\right]_{+}=\left[\hat{\boldsymbol{b}}^{+}(\boldsymbol{p},t),\hat{\boldsymbol{b}}^{+}(\boldsymbol{p}',t)\right]_{+}=0 \qquad (۸)$$

$$\left[\hat{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{p},t),\hat{\boldsymbol{b}}^{+}(\boldsymbol{p}',t)\right]_{+}=\delta(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}) \qquad (۹)$$

۴- هامیلتونی برهم کنش

هامیلتونی نسبیتی برهم‌کنش الکترون با میدان الکترومغناطیسی در تابش مورد نظر ما بدین شکل است[۲]

$$\hat{\boldsymbol{H}}_{I}=-ec\int d^{3}\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\psi}^{+}\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\psi} \qquad (۱۰)$$

که در آن $\boldsymbol{\psi}$عملگر میدان ذره می باشد. با جایگذاری به شکل زیر در می آید.

$$\hat{H}_{I}=-ec\sum_{s,s'}\left(\frac{\hbar}{8\pi^{4}\varepsilon_{0}}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{\infty}d\omega\int d^{3}k\int d^{3}p \qquad (۱۱)$$
$$\times\boldsymbol{u}_{\lambda'}^{+}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{r})\boldsymbol{\alpha}.\tilde{\boldsymbol{e}}_{s}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{u}_{\lambda}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\hat{\boldsymbol{b}}_{\lambda'}^{+}(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k},t)\hat{\boldsymbol{b}}_{\lambda}(\boldsymbol{p},t)$$
$$\times\left\{\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_{i}(\omega)}\delta_{s,s'}\hat{\boldsymbol{f}}_{s'}^{e^{+}}(\boldsymbol{k},\omega)+\boldsymbol{k}c\sqrt{|\kappa_{i}(\omega)|}\varepsilon_{s,s'}\hat{\boldsymbol{f}}_{s'}^{m^{+}}(\boldsymbol{k},\omega)}{k^{2}c^{2}\kappa(\omega)-\omega^{2}\varepsilon(\omega)}\right\}$$
$$\times\exp(i\omega t)$$

۵- احتمال گسیل فوتون

در بررسی تابش چرنکوف فرض می‌شود که تعداد فوتونها در حالت سیستم مختل نشده صفر باشد و پس از گسیل تنها یک فوتون تولید شود. با داشتن اطلاعات فوق می-توان احتمال گسیل فوتون در واحد زمان توسط الکترونی که با سرعت $\boldsymbol{v}$ در محیط حرکت می‌کند را به دست آورد. بدین منظور از قاعده طلایی فرمی استفاده می‌شود. اگر سیستم ابتدا در حالت اولیه $|i\rangle$ با انرژی E_i باشد، احتمال در واحد زمان برای آنکه سیستم در حالت نهایی $|f\rangle$ با انرژی E_f یافت شود، طبق قاعده فرمی به صورت زیر محاسبه می‌شود[۲]:

$$\left(\frac{trans.porb}{time}\right)=\frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{fi}\right|^{2}\delta\left(E_f-E_i\right) \qquad (۱۲)$$

در رابطه بالا، V_{fi} عنصر ماتریسی اختلال است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$V_{fi}=\langle f|V|i\rangle \qquad (۱۳)$$

که پس از جایگذاری رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{transprob}{time}\right)_{p+k,\lambda'\to \mathrm{p},\lambda}= \qquad (۱۵)$$
$$\frac{2\pi}{\hbar}e^{2}c^{2}\left(\frac{\hbar}{8\pi^{4}\varepsilon_{o}}\right)\frac{\omega^{2}\varepsilon_{i}(\omega)+k^{2}c^{2}k_{i}(\omega)}{\left|k^{2}c^{2}k(\omega)-\omega^{2}\varepsilon(\omega)\right|^{2}}$$
$$\left|u_{\lambda'}^{+}(p+k,r)a.\tilde{\mathrm{e}}_{s}(k)u_{\lambda}(p,r)\right|^{2}$$
$$\delta\left(\sqrt{\hbar^{2}c^{2}\left|p+k\right|^{2}+m^{2}c^{4}}-\sqrt{\hbar^{2}c^{2}p^{2}+m^{2}c^{4}}-\hbar\omega\right)$$

۶- انرژی اتلافی سیستم در واحد طول

احتمال گسیل یک فوتون با فرکانس ω_k و پلاریزاسیون

σ در واحد زمان را محاسبه شد. اگر این احتمال در انرژی یک فوتون ضرب شود در واقع آن مقدار انرژی که سیستم در واحد زمان از دست می‌دهد تا فوتونی با بردار موج k و پلاریزاسیون σ خلق شود، را به دست آورده‌ایم. از سوی دیگر فوتونهای بی شماری با فرکانسها و پلاریزاسیون های مختلفی تولید می‌شود، از این رو کافی است آهنگ از دست دادن انرژی در واحد زمان را به ازای فرکانسها و پلاریزاسیون‌های مختلف به دست آورده و سپس آنها را با هم جمع کرد. پس جمع نهایی باید شامل یک جمع روی اسپین‌های نهایی الکترون باشد و روی اسپین اولیه میانگین‌گیری کرد که ضریب $\frac{1}{2}$ ظاهر می‌شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{dW}{dt}=\frac{1}{2}\sum_{\sigma}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2}\int d^3k\,\hbar\omega_k\left(\frac{\text{transprob}}{\text{time}}\right) \qquad (۱۵)$$

و به سادگی می‌توان آهنگ از دست دادن انرژی در واحد طول را به روش زیر محاسبه کرد:

$$\frac{dW}{dx}=\frac{1}{v}\frac{1}{2}\sum_{\sigma}\sum_{\lambda'=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2}\int d^3k\,\hbar\omega_k\left(\frac{\text{transprob}}{\text{time}}\right) \qquad (۱۶)$$

با جایگذاری رابطه (۱۵) در (۱۶) رابطه زیر به دست می-آید:

$$\frac{dW}{dx}=\frac{e^2}{2\pi^2\varepsilon_o}\int\omega\,d\omega\int k\,dk \qquad (۱۷)$$
$$\frac{\omega^2\varepsilon_i(\omega)+k^2c^2\kappa_i(\omega)}{\left|k^2c^2\kappa(\omega)-\omega^2\varepsilon(\omega)\right|^2}$$
$$\left(1-\frac{\omega^2}{k^2v^2}\left(1+\frac{\hbar\omega}{2mc^2}\left(\frac{c^2k^2}{\omega^2}-1\right)\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2\right)$$

حال عبارت (۱۷) با عبارت زیر[۳] که در واقع انرژی اتلافی الکترون غیرنسبیتی در واحد طول برای محیط های دی الکتریک همـگن سه بعدی است، به صورت دیفرانســیلی مـقایسه می شود.

$$\left.\frac{dW}{dx}\right|_{\text{دی‌الکتریک}}=\frac{e^2}{2\pi^2\varepsilon_o}\int\omega\,d\omega\int dk \qquad (۱۸)$$
$$\frac{k\,\omega^3\varepsilon_i(\omega)}{\left|k^2c^2-\omega^2\varepsilon(\omega)\right|^2}\left(1-\left(\frac{\omega}{kv}+\frac{\hbar k}{2mv}\right)^2\right)$$

$$\frac{\left.\frac{dW}{dx\,d\omega\,dk}\right|_{\text{دی‌الکتریک مغناطیده}}}{\left.\frac{dW}{dx\,d\omega\,dk}\right|_{\text{دی‌الکتریک}}}=\frac{\omega^2\varepsilon_i+k^2c^2\kappa_i}{\omega^2\varepsilon_i}\frac{\left|k^2c^2-\omega^2\varepsilon(\omega)\right|^2}{\left|k^2c^2\kappa(\omega)-\omega^2\varepsilon(\omega)\right|^2} \qquad (۱۹)$$
$$\times\frac{\left(1-\frac{\omega^2}{k^2v^2}\left(1+\frac{\hbar\omega}{2mc^2}\left(\frac{c^2k^2}{\omega^2}-1\right)\sqrt{1-v^2/c^2}\right)^2\right)}{\left(1-\left(\frac{\omega}{kv}+\frac{\hbar k}{2mv}\right)^2\right)}$$

در واقع عبارت (۱۹) نشان‌دهنده تصحیح نسبیتی برای محیط دی‌الکتریک مغناطیده است. این نسبت برای سرعتهای پایین در اکثر نقاط برابر یک است که با انتظار ما توافق خوبی دارد. هرچه سرعت الکترون به سمت سرعتهای بالا می‌رود، نسبت از یک فاصله می‌گیرد.

۷- نتیجه گیری

انرژی اتلافی سیستم در واحد طول را برای تابش چرنکوف نسبیتی به دست آوردیم. با انجام محاسبات می توان نشان داد که روابط به دست آمده تعمیم روابط گذشته (آهنگ اتلاف انرژی در محیط دی الکتریک $\frac{dW}{dx}=\frac{1}{v}\frac{dW}{dt}$ که درآن الکترون با سرعت غیر نسبیتی حرکت می کند) است. در واقع هدف از انجام این محاسبات بهبود بخشیدن به روابط گذشته است.

سپاسگزاری

از جناب آقای دکتر محمدرضا مطلوب که اینجانب را در تهیه این مقاله یاری دادند تشکر می نمایم.

مراجع

[1] R.Matloob, Phys. Rev. A **60,** 50 (1999).

[2] E.G. Harris, A Pedestrian Approch to Quantum Field Theory, Wiley, USA, (1972)

[۳] غفاری، علیرضا. (۱۳۸۱): ***تابش چرنکوف در محیط پاشنده اتلافی***، پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک، دانشگاه باهنر کرمان.