بیست و پنجمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و یازدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شیراز،
شیراز، ایران.
۹-۱۱ بهمن ۱۳۹۷

Shiraz University

فاز هندسی یک اتم دو ترازی در مجاورت یک نانوکره‌ی جاذب و پاشنده

سمیه محمدی عبده‌وند[۱]، احسان عموقربان[۱،۲،۳]، علی مهدی‌فر[۴]

[۱]دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد
[۲]گروه پژوهشی فوتونیک، دانشگاه شهرکرد
[۳]مرکز تحقیقات نانوتکنولوژی، دانشگاه شهرکرد
[۴]گروه فیزیک، دانشگاه اصفهان

چکیده– در این مقاله به مطالعه‌ی فاز هندسی یک اتم دو ترازی در مجاورت یک نانوکره‌ی جاذب می پردازیم. بدین منظور، بـا بـه کاربردن معادله‌ی تحول زمانی فون–نویمن، عملگر چگالی کاهش یافته سامانه اتمی را در تقریب‌های مارکوف و امواج چرخان بدست می‌آوریم. سپس با تعیین ویژه مقادیر و ویژه بردارهای عملگر چگالی کاهش یافته‌ی سامانه اتمی، بـه محاسـبه‌ی جابجـایی لمـب و آهنگ‌های گذار برحسب تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه می‌پردازیم. در نهایت با محاسبه تانسـور گـرین الکترومغناطیسـی سامانه و استفاده از رهیافت سینماتیک، فاز هندسی بدست می‌آید. مشاهده می‌کنیم که فاز هندسی در نزدیکی بسامد برانگیختگی پلاریتون–فونون در کره به شدت تغییر خواهد کرد.

کلید واژه– فاز هندسی، عملگر چگالی کاهش یافته، معادله فون- نویمن، رهیافت سینماتیک فاز هندسی

Geometric phase of a two-level atom near a dissipative and dispersive nano-sphere

Somaye Mohamadi Abdhvand, Ehsan Amooghorban, Ali Mahdifar
Somaye.mah1993@gmail.com, amoghorban@gmail.com, ali.mahdifar@gmail.com

Abstract- In this paper, we study the geometric phase of a two-level atom near a dissipative nano-sphere. For this purpose, by applying the Von-Neumann equation, we obtain the reduced density operator of the atomic system in the Markov and the rotating-wave approximations. Then, by specifying the eigenvalues and the eigenvectors of the reduced density operator, the Lamb shift and transition rates in terms of the Green tensor of system are obtained. Finally, by calculating the Green tensor of system and making use of the kinematic approach, the geometric phase is calculated. We observe that the geometric phase near the excitation frequency of the polariton-phonons in the sphere will be drastically changed.

Keywords: Geometric phase, Reduced density operator, Von Neumann equation, Kinematic approach

Shiraz University

بیست و پنجمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و یازدهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شیراز،
شیراز، ایران.
۹-۱۱ بهمن ۱۳۹۷

۱. مقدمه

زمانی‌که یک بردار روی یک سطح تخت یا خمیده طوری انتقال داده شود که طول آن ثابت و راستای آن نسبت به بردار عمود بر سطح تغییر نکند، انتقال موازی داده شده است[۱]. اگر این انتقال روی یک منحنی بسته که بر یک سطح تخت قرار دارد انجام شود، بردار بدون هیچ تغییری به نقطه اولیه باز می‌گردد. ولی اگر این انتقال روی سطح خمیده انجام شود، زمانی که بردار به نقطه اولیه می‌رسد، به اندازه زاویه φ برابر با زاویه‌ای که توسط منحنی محاط شده، چرخیده است. در مکانیک کلاسیک به این زاویه که در فرآیند انتقال موازی بدست می‌آید فاز هندسی گفته می‌شود. فاز هندسی در مکانیک کلاسیک اولین بار توسط پانکاراتنام حین مطالعه‌ی چرخش قطبش نور در سال ۱۹۵۶ مطرح شد [۲].

در مکانیک کوانتومی حالت هر سامانه در هر لحظه از زمان توسط بردار حالت توصیف می‌شود. تحول زمانی بردار حالت سامانه توسط معادله شرودینگر و یا عملگر یکانی $\mathrm{U(t)} = \mathrm{e}^{-iHt/\hbar}$ توصیف می‌شود. حال اگر این تحول یک تحول چرخه‌ای باشد، بردار حالت اولیه‌ی $|\psi\rangle$ و نهایی $|\psi'\rangle$ توسط رابطه‌ی $|\psi'\rangle = e^{i\varphi}|\psi\rangle$ به یکدیگر مرتبط می‌شوند که در آن φ یک عدد حقیقی است. در مکانیک کوانتومی فاز حاوی اطلاعاتی راجع به حافظه‌ی سامانه است. در سال ۱۹۸۴ بری نشان داد زمانی‌که هامیلتونی یک سامانه کوانتومی تحول چرخه‌ای پیدا کند، عامل فازی ایجاد شده در بردار حالت سامانه شامل دو بخش خواهد بود: بخش اول وابسته به دینامیک سامانه بوده، در حالی‌که بخش دوم کاملا مستقل از دینامیک است و فقط به هندسه‌ی فضای حالت بستگی دارد [۳]. آهارنوف و آناندن در سال ۱۹۸۷ فاز هندسی مزبور را برای تحول سامانه‌های غیر بی‌دررو تعمیم دادند. در حال حاضر، فاز هندسی برای سامانه‌های غیرچرخه‌ای مخلوط، سامانه های اپتومکانیک و سامانه‌های اتمی که در خلا در برهم‌کنش با میدان الکترومغناطیسی هستند محاسبه شده است [۶-۴]. در این مقاله قصد داریم تا فاز هندسی را برای یک سامانه‌ی اتمی که در مجاورت یک نانو کره‌ی دی‌الکتریک جاذب است مطالعه کنیم.

۲. دینامیک سامانه

سامانه‌ای متشکل از یک اتم دو ترازی در مجاورت یک نانوکره دی الکتریک در نظر می‌گیریم که با میدان الکترومغناطیس در برهم کنش است. هامیلتونی این سامانه به صورت زیر نوشته می شود:

$$H_{tot} = H_A + H_F + H_I,$$

که در آن $H_A = \sum_{m=1}^{2} \hbar\omega_m |m\rangle\langle m|$ هامیلتونی اتم آزاد، H_F هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی، ماده و بر هم بین آن‌ها و H_I هامیلتونی برهم‌کنشی بین اتم و میدان است. در این‌جا هامیلتونی بر هم‌کنشی به صورت $H_I = -\mathbf{D}(t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ نوشته می‌شود که در آن $\mathbf{D}(t) = \mathbf{d}_{21}|2\rangle\langle 1|e^{-i\omega_0 t} + \mathbf{d}_{21}^{*}|1\rangle\langle 2|e^{i\omega_0 t}$ گشتاور دو قطبی الکتریکی القایی بین ترازپایه $|1\rangle$ و تراز برانگیخته $|2\rangle$ و $\mathbf{E}(r,t)$ میدان الکتریکی است.

به منظور توصیف دینامیک سامانه از معادله فون-نویمن زیر در تصویر برهم‌کنش استفاده می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt}\rho_{tot}(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[H, \rho_{tot}(t)\right]. \qquad (۱)$$

با به کار بردن تقریب های مارکوف و امواج چرخان و فرض برهم‌کنش ضعیف بین اتم و میدان، رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[H_{LS}, \rho(t)\right] + \Gamma(\omega_0)\left[\rho_{22}|1\rangle\langle 1| - \frac{1}{2}\left\{|2\rangle\langle 2|, \rho(t)\right\}\right] + \Gamma(-\omega_0)\left[\rho_{11}|2\rangle\langle 2| - \frac{1}{2}\left\{|1\rangle\langle 1|, \rho(t)\right\}\right].$$

فرض می کنیم که سامانه اتمی در حالت اولیه $\cos\theta/2\,|+\rangle+\sin\theta/2\,|-\rangle$ است. با یافتن پاسخ‌های رابطه‌ی بالا، ماتریس چگالی کاهش یافته سامانه اتمی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho(t)=\begin{pmatrix} e^{-\gamma(\omega)t}\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{\Gamma(-\omega_0)}{\gamma(\omega_0)}\left(e^{-\gamma(\omega)t}-1\right) & \frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma(\omega_0)}{2}t-i\Lambda t}\sin\theta \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{\gamma(\omega_0)}{2}t+i\Lambda t}\sin\theta & 1-e^{-\gamma(\omega_0)t}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{\Gamma(-\omega_0)}{\gamma(\omega_0)}\left(e^{-\gamma(\omega_0)t}-1\right)\end{pmatrix}. \quad (۲)$$

در این‌جا $\Gamma(\pm\omega_0)=\sum_{i,j}[\mathbf{d}_{21}]_i^*[\mathbf{d}_{21}]_j\gamma_{ij}(\pm\omega_0)$ بوده که در آن

$$\gamma_{ij}(\omega_0)=\frac{2\mu_0\omega^2}{\hbar}\left[1+N(\omega,\beta)\right]\operatorname{Im}\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_A,\omega_0),$$

$$\gamma_{ij}(-\omega_0)=\frac{2\mu_0\omega^2}{\hbar}N(\omega,\beta)\operatorname{Im}\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_A,\omega_0),$$

آهنگ‌های گذار به سمت بالا و پایین هستند. علاوه بر این، $N(\omega,\beta)=\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}$ بسامد گذار بین دو تراز، ω_0 میانگین تعداد فوتون‌ها و $\bar{\mathbf{G}}_{ij}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_A,\omega)$ تانسور گرین الکترومغناطیسی سامانه است. جابجایی لمب سامانه با استفاده از توابع هم‌بستگی میدان الکتریکی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Lambda(\omega_0)=-\frac{1}{\hbar}\sum_{i,j}[\mathbf{d}_{21}]_i^*[\mathbf{d}_{21}]_j\operatorname{Re}\bar{\mathbf{G}}_{ij}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_A,\omega).$$

۳. تانسور گرین سامانه

با به کاربردن روش برهم‌نهی پراکننده، تانسور گرین سامانه به صورت زیر تفکیک می‌شود [۷]:

$$\bar{\mathbf{G}}_e^{fs}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\bar{\mathbf{G}}_{0e}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta_f^s+\bar{\mathbf{G}}_{es}^{(fs)}(\mathbf{r},\mathbf{r}'),$$

که در آن $\bar{\mathbf{G}}_{0e}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ تانسور گرین خلا و $\bar{\mathbf{G}}_{es}^{(fs)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ تانسور گرین پراکنده است. برای وضعیتی که نقاط چشمه و میدان هر دو در ناحیه ۱ (بیرون از کره) هستند، تانسورهای بالا به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\bar{\mathbf{G}}_{0e}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{\hat{r}\hat{r}}{{k_s}^2}\delta(r-r')+\frac{ik_s}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(2-\delta_m^0)\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$
$$(\mathbf{M}_{mn}^{(1)}(k_s)\mathbf{M}'_{mn}(k_s)+\mathbf{N}_{mn}^{(1)}(k_s)\mathbf{N}'_{mn}(k_s)),$$

$$\bar{\mathbf{G}}_{es}^{11}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{ik_1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(2-\delta_m^0)\frac{2n+1}{n(n+1)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \quad (۳)$$
$$\left[B_M{}^{11}\mathbf{M}_{mn}{}^{(1)}(k_1)\mathbf{M}'^{(1)}_{mn}(k_1)+B_N{}^{11}\mathbf{N}_{mn}{}^{(1)}(k_1)\mathbf{N}'^{(1)}_{mn}(k_1)\right].$$

که در آن علامت پرایم نشان دهنده‌ی مختصات چشمه و عبارت های بدون پرایم بیانگر نقاط میدان، ضرایب B_M^{11} و B_N^{11}ضرایب بازتاب تعمیم یافته و ویژه توابع $\mathbf{M}_{nm}$ و $\mathbf{N}_{nm}$توابع موج کروی هستند که جزییات آن در مرجع [۷] آمده است. به منظور ساده‌سازی محاسبات، فرض می‌کنیم که اتم مزبوز در جهت مثبت محور z و در فاصله r از مرکز کره است. با انجام محاسبات طولانی نشان داده می‌شود که مولفه های شعاعی و مماسی تانسور گرین پراکننده (۳) به ترتیب به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$\bar{\mathbf{G}}_{rr}^{11}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_A,\omega)=\frac{ik_1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{kr}\frac{n(n+1)}{kr}\left(Z_n^{(1)}(kr).Z_n(kr)\right)+$$
$$\frac{ik_1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{kr}\frac{n(n+1)}{kr}\left[Z_n(kr)\right]^2\left(B_{M,N}^{11}\right),$$

$$\bar{\mathbf{G}}_{tt}^{11}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_A,\omega)=\frac{ik_1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\left(Z_n^{(1)}(kr)\cdot Z_n(kr)\right)$$
$$+\frac{ik_1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\left[\frac{1}{kr}\frac{d\left[rZ_n^{(1)}(kr)\right]}{kr}\frac{1}{kr}\frac{d\left[rZ_n(kr)\right]}{kr}\right]+$$
$$\frac{ik_1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\left(B_M^{11}\left(Z_n^{(1)}(kr)\right)^2+B_N^{11}\left(\frac{1}{kr}\frac{d\left[rZ_n^{(1)}(kr)\right]}{kr}\right)\right).$$

که در آن $Z_n(kr)$ تابع بسل کروی $j_n(\rho)$ و $Z_n^{(1)}(kr)$ تابع هنکل مرتبه اول $h^{(1)}{}_n(\rho)$ هستند.

۴. فاز هندسی

در ادامه، با استفاده از رهیافت سینماتیک که یک روش مناسب برای محاسبه فاز هندسی سامانه‌های مخلوط آماری است، به محاسبه فاز هندسی سامانه‌ی اتمی می‌پردازیم. با توجه به این‌که سامانه مورد مطالعه در این‌جا یک سامانه اتلافی است، بنابراین این سامانه در حالت مخلوط آماری به‌سر می‌برد. از این‌رو با به کاربردن

رهیافت سینماتیک، فاز هندسی به صورت زیر تعریف می‌شود [۸] :

$$\Phi_g = \arg\left(\sum_{k=1}^{N}\sqrt{\lambda_k(0)\lambda_k(T)}\langle\phi_k(0)|\phi_k(T)\rangle e^{-\int_0^T\langle\phi_k(t)|\dot{\phi}_k(t)\rangle dt}\right), \quad (۴)$$

که در آن λ_k ویژه مقادیر، $T = 2\pi/\Lambda$ و $|\phi_k\rangle$ ویژه بردارهای ماتریس چگالی کاهش یافته (۲) هستند. با انجام محاسبات ساده ولی طولانی می‌توان نشان داد که ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس چگالی کاهش یافته اتمی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\lambda_\pm(t) = \frac{1}{2}(1\pm\eta),$$

$$|\phi_+(t)\rangle = \sin\frac{\theta_t}{2}|+\rangle + \cos\frac{\theta_t}{2}e^{i\Lambda t}|-\rangle.$$

در این‌جا $\eta = \sqrt{\xi^2 + e^{-4(\Gamma(\omega_0)+\Gamma(-\omega_0))t}\sin^2\theta}$، $\tan\theta_t/2 = \sqrt{\eta+\xi/(\eta-\xi)}$ و $\xi = e^{-4(\Gamma(\omega_0)+\Gamma(-\omega_0))t}\cos\theta + Q\left(e^{-4(\Gamma(\omega_0)+\Gamma(-\omega_0))t}-1\right)$ است.

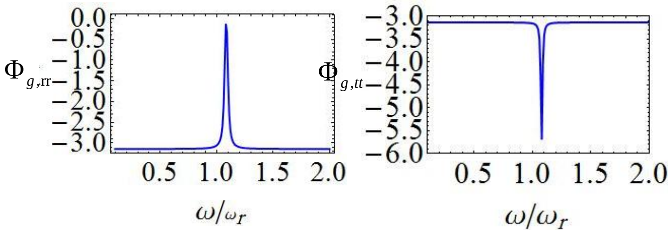
اکنون با جایگذاری روابط بالا در رابطه (۴) و انجام محاسبات طولانی خواهیم داشت:

$$\Phi_g = -\frac{1}{2}\int_0^T\left(1-\frac{Q-Qe^{\gamma(\omega_0)t}+\cos\theta}{\sqrt{e^{\gamma(\omega_0)t}\sin^2\theta+(Q-Qe^{\gamma(\omega_0)t}+\sin\theta)}}\right)\Lambda dt, \quad (۵)$$

که در آن $Q = \dfrac{\Gamma(\omega_0)-\Gamma(-\omega_0)}{\Gamma(\omega_0)+\Gamma(-\omega_0)}$ است.

۵. محاسبات عددی و نتیجه گیری

با توجه به پیچیدگی رابطه ی (۵)، در ادامه به بررسی عددی فاز هندسی می‌پردازیم. بدین منظور، نانو کره‌ای به شعاع μm ۰/۹۸ و از جنس گالیوم آرسنیک در نظر می‌گیریم که گذردهی الکتریکی آن توسط الگوی لورنتس-دورود $\varepsilon = \varepsilon_\infty \dfrac{\omega^2-\omega_l^2+\iota\gamma\omega}{\omega^2-\omega_r^2+\iota\gamma\omega}$ الگوسازی می‌شود. در این‌جا، $\omega_r = 0.506\times10^{14}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$، $\omega_l/\omega_r = 1.08$، $\gamma/\omega_r = 0$، $\varepsilon_\infty = 11$، $r = 0.02\,\mu m$ و $\theta = \pi/2$ در نظر می‌گیریم [۹]. اکنون با جایگذاری این روابط در رابطه (۵)، فاز هندسی برحسب بسامد بدون بعد ω/ω_r برای وضعیتی که گشتاور دو قطبی اتم در راستای شعاعی (عمود بر سطح کره) و مماسی (به موازات سطح کره) است، در شکل‌های زیر رسم شده است.



به سادگی می‌توان نشان داد که در غیاب نانو کره، فاز هندسی (۵) برابر $-\pi$ است. در حالی‌که نمودارهای بالا نشان می‌دهند که فاز هندسی در حضور نانو کره و در نزدیکی بسامد برانگیخته شدن پلاریتون-فونون‌های سطحی $\omega/\omega_r = 1.09$ به شدت تغییر می‌کند. به علاوه، اگرچه در این مقاله نشان داده نشده است، همانطور که انتظار داریم فاز هندسی با افزایش فاصله اتم از کره به سمت مقدار خلا یعنی $-\pi$ میل می‌کند.

۶. مرجع‌ها

[1] J. Anandan, The geometric phase, Nature **360**, 307 (1992).
[2] S. Pancharatnam, Generalized theory of interference and its application, Proc. Ind. Acad. Ssi. A **44**, 247 (1984).
[3] A. Hansen, the Berry phase, Ph. D thesis (2006).
[4] M. V. Berry, Proc. Roy. Soc. Lond. A **392**, 45 (1984).
[۵] پروین رحیمی،علی مهدی‌فر و احسان عموقربان، فاز هندسی سامانه های اپتوکوانتومی، مجله پژوهش فیزیک ایران، **۱۷**، ۲۱ (۱۳۹۶).
[6] A. Uhlman, Rep. Math. Phys. **24**, 229 (1986).
[7] L. Li, P. Kooi, M. Leong, T. Yeo, IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **42**, 2302 (1994).
[8] D. M. Tong, E. Sjoqvist, L. C. Kwek, C. H. Oh, Phys. Rev. Lett. **93**, 080405 (2004).
[9] B. Bellomo, R. Messina. Phys. Rev A **87**, 012101 (2013).