بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

اصلاحیه‌ای بر پروتکل BB84 برای افزایش امنیت حالت‌های کوانتومی در یک پیام رمز شده نوری

سمیرا مرشدی[۱] ، فرامرز اسمعیلی سراجی[۲] و منصور رضایی مرساق[۱]
[۱]گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران شمال، حکیمیه، تهران
[۲]گروه مخابرات نوری، مرکز تحقیقات مخابرات ایران (پژوهشگاه)، تهران

چکیده- در این مقاله، با به‌کارگیری اصول مکانیک کوانتمی تغییری در پروتکل BB84 ایجاد کرده‌ایم و با استفاده از روش جستجوی تصادفی نشان داده شده که تقریب زدن یک حالت دو کیوبیتی درهم تنیده با حالت‌های ضربی دو کیوبیتی مشکلاتی برای شنودگر پنهانی ایجاد می‌کند. نتیجه‌های به‌دست آمده می‌تواند در رمزگذاری اطلاعات سری در سیستم‌های مخابرات کوانتومی مورد استفاده قرار گیرد.

کلید واژه- کیوبیت، روش جستجوی تصادفی، درهم تنیده، امنیت

A Correction on BB84 Protocol for Enhancement of Quantum State Security in an Encoded Optical Message

Samira Morshedi[1], Faramarz E. Seraji[2], M. Rezaie Mersagh[1]
[1]Phsycis Gorup, Islamic Azad Univ., Tehran Shomal Branch, Hakimieh, Tehran

Abstract- In this paper, using quantum mechanics principles, a change is made in BB84 protocol, then by utilizing random search method, we have shown that approximation of entangled two-Qbit state with two-Qbit multiplication state, makes eavesdropper confuse in decoding the secured information. The obtained results can be used in encoding of covert information in quantum communication systems.

Kerwords: Q-bit, Random search method, Entanglement, Security.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-08]

۱- مقدمه

در سال ۱۹۹۲ پروتکل B92 بر گرفته از پروتکل BB84 است که تنها دو پایهٔ نامتعامد $|\circ\rangle$ و $|+\rangle$ را به‌کار می‌برد [1]. سپس هوونگ لو با سازگار کردن BB84 بر پایه عملگرهای x,y,z به پروتکل ۶ حالتی دست یافت [2]. نخستین پیشنهاد برای BB84 تنها امنیت در برابر مدل‌های حمله ساده را محافظت می‌کرد [3]. اگرچه برای نشان دادن امنیت BB84 باید به شنودگر اجازه دهیم تا هر عملی را که مکانیک کوانتمی مجاز می‌داند انجام دهد. امنیت بی قید و شرط پروتکل BB84 برای نخستین بار در سال ۱۹۹۶به اثبات رسید. [4]. پس از آن گروهی دیگر اثبات دیگری را با استفاده از شیوه‌ای متفاوت ارائه کردند [5-8].

در سال ۱۹۹۹، اثبات ساده‌ای از کلیدهای رمزگذاری کوانتومی ارائه شد [9] که به یک پروتکل گلچین کننده اطلاعات درهم تنیده[1] مربوط می‌شد [10]. اخیراً رمزگذاری کوانتومی تنیده در فضای آزاد در فاصله بیش‌از ۱۵ کیلومتر آزمایش شده است که در آن از پروتکل BB84 استفاده شده است [11]. در سال‌های اخیر، امنیت رمزگذاری سیستم‌های کوانتومی مورد توجه ویژه محققان قرار گرفته و با استفاده از پروتکل BB84 جنبه‌های مختلف آن بررسی شده است [12, 13]

در این مقاله، با به‌کار گیری اصول مکانیک کوانتمی تغییری در پروتکل BB84 ایجاد کرده‌ایم و با بیان جزئیات نشان داده‌ایم که تقریب زدن یک حالت دو کیوبیتی درهم تنیده با حالت‌های ضربی دو کیوبیتی مشکلاتی برای شنودگر پنهانی ایجاد می‌کند.

۲- بهینه‌سازی حالت‌های کوانتمی در یک پیام رمز شده نوری

در این بخش پروتکل را که بر پایه پروتکل BB84 بنا شده را تحلیل می‌کنیم. پروتکل ما در مرحله‌های زیر با پروتکل BB84 متفاوت است:

۱- پیش از هر چیز آلیس (فرستنده) و باب (گیرنده) برای توزیع کلید روی یک تبدیلِ یکانی توافق می‌کنند به‌طوری که همگان می‌توانند از این تبدیل یکانی $U:H^N \to H^N$ آگاه شوند.

۲- کارهایی که آلیس در اینجا انجام می‌دهد با پروتکل BB84 به دلایل زیر متفاوت است: الف) تا هنگامی که همه N کیوبیت را تولید نکند، فرستادن کیوبیت‌ها را به تعویق می‌اندازد[2].

ب) سپس U را برکیوبیت‌ها اعمال می‌کند.

ج) آنگاه کیوبیت‌ها را یکی یکی می‌فرستد. آلیس پیش از فرستادن هر کیوبیت منتظر می‌ماند تا باب به او خبر دهد که کیوبیت پیشین را دریافت کرده است.

۳- کارهایی که باب اینجا انجام می‌دهد با پروتکل BB84 متفاوت است زیرا او:

الف) تا هنگامی که همه N کیوبیت را دریافت نکرده است، اندازه‌گیری‌های مورد نیاز پروتکل BB84 را انجام نمی‌دهد.

ب) فوراً پس از دریافت هر کیوبیت به آلیس خبر می‌دهد.

ج) با دریافت دنباله N کیوبیتی، تبدیل $U^{-1}=U^{\dagger}$ را بر آن‌ها اعمال می‌کند و آنگاه همانند آنچه در پروتکل BB84 داشتیم روی آن‌ها اندازه‌گیری انجام می‌دهد.

تبدیل U را می‌توان بسطی برای پروتکل BB84 در نظر گرفت. شنودگر کاملاً از U آگاه است، زیرا به‌طور همگانی اعلام می‌شود. چون باب به محض دریافت هر کیوبیت آلیس را آگاه می‌کند، شنودگر بر هر حالت N-کیوبیتی دسترسی یک به یک دارد. در پروتکل ما آلیس کیوبیت‌هایی از حالت $\left|\psi_{a_1,a_2,\ldots,a_N}\right\rangle$ را یک به یک برای باب می‌فرستد.

اگر U به شکل زیر باشد:

$$U=U_1\otimes U_2\otimes\ldots\otimes U_N \qquad (۱)$$

$$\begin{aligned} U\left(|a_1\rangle\otimes|a_2\rangle\otimes\ldots\otimes|a_N\rangle\right)&=\left(U_1\otimes U_2\otimes\ldots\otimes U_N\right)\left(|a_1\rangle\otimes|a_2\rangle\otimes\ldots\otimes|a_N\rangle\right)\\ &=U_1|a_1\rangle\otimes U_2|a_2\rangle\otimes\ldots U_N\otimes|a_N\rangle\\ &=|\psi_{a_1}\rangle\otimes|\psi_{a_2}\rangle\otimes\ldots\otimes|\psi_{a_N}\rangle \end{aligned} \qquad (۲)$$

اگر U به گیت‌های تک-کیوبیتی تجزیه پذیر باشد، حالت N-کیوبیتی فرستاده شده، حالتی ضربی است. شنودگر می‌تواند U را بی اثر کند و به کیوبیت‌های نا درهم تنیده حمله کرده و با $U_j^{\dagger}$ و U_j حالت فرستاده

[1] Entanglement Distribution Protocol: EDP

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-08]

شده را باز سازی کند. آلیس و باب باید U را چنان برگزینندکه یک حالت N-کیوبیتی درهم تنیده تولید کند، یعنی به این مفهوم است که:

$$U \neq U_1 \otimes U_2 \otimes \ldots \otimes U_N \qquad (۳)$$

است. پس آلیس و باب با استفاده از U نا موضعی، درهم تنیدگی را به‌کار گرفته و مانع می‌شوند که شنودگر به‌طورکامل به کیوبیت‌های فرستاده شده دسترسی یابد.

۳- تقریب حالت ضربی از یک جفت کیوبیت درهم تنیده

برای درک اندیشه به‌کارگیری یک گیت N-کیوبیتی درهم تنیده در پروتکل BB84، روی دقتی که یک حالت دو کیوبیتی درهم تنیده می‌تواند با حالتی از دو کیوبیت ضربی تقریب زده شود، تحلیلی انجام داده‌ایم که در آن مقدار N به ۲ محدود شده است. این تحلیل نشان می‌دهد که پروتکل محدودیتی ذاتی برای شنودگر ایجاد می‌کند. فرض کنید شنودگر برای تقریب زدن حالت بهنجار $|\psi\rangle \in c^{2^N} = H^N$ که آلیس در هر زمان یکی از کیوبیت‌های آن را برای باب فرستاده است، حالت زیر را بسازد:

$$\bigotimes_{i=1}^{N} |\psi_i\rangle, \qquad |\psi_i\rangle \in c^2 = H^1, \left\| |\psi_i\rangle \right\| = 1 \qquad (۴)$$

در این تقریب شنودگر کوشش می‌کند که خطا را کمینه کند در حالی‌که آلیس و باب می‌کوشند با گزینش مناسب $|\psi\rangle$ خطای شنودگر را بیشینه کنند. این خطای بیشینه-کمینه به‌صورت زیر است:

$$E_{mm} := \max_{|\psi\rangle} \min_{\{|\psi_i\rangle\}} \left\| |\psi\rangle - \bigotimes_{i=1}^{N} |\psi_i\rangle \right\| \qquad (۵)$$

در اینجا جمله $\left\| |\psi\rangle - \bigotimes_{i=1}^{N} |\psi_i\rangle \right\|$ همان فاصله ردی بین ماتریس چگالی‌های مربوط به $|\psi\rangle$ و $\bigotimes_{i=1}^{N} |\psi_i\rangle$ است.

۳-۱- فرضیه برای تعیین E_{mm}

فرض می‌کنیم که آلیس و باب $N = ۲$ را برگزیده‌اند که در این‌صورت حالتِ آلیس با زابطه زیر بیان می‌شود:

$$|\psi\rangle = \left(r_{\alpha_1} e^{i\alpha_1} \quad r_{\alpha_2} e^{i\alpha_2} \quad r_{\alpha_3} e^{i\alpha_3} \quad r_{\alpha_4} e^{i\alpha_4} \right)^{\mathrm{T}} \qquad (۶)$$

و حالت‌های شنودگر به‌صورت زیر است:

$$|\psi_1\rangle = \left(r_{\phi_1} e^{i\phi_1} \quad r_{\phi_2} e^{i\phi_2} \right)^{\mathrm{T}} \qquad (۷)$$

$$|\psi_1\rangle = \left(r_{\omega_1} e^{i\omega_1} \quad r_{\omega_2} e^{i\omega_2} \right)^{\mathrm{T}} \qquad (۸)$$

از بهنجارش بردارها در رابطه‌های (۶) تا (۸)، داریم:

$$r_{\alpha_1}^2 + r_{\alpha_2}^2 + r_{\alpha_3}^2 + r_{\alpha_4}^2 = 1 \qquad (۹)$$

$$r_{\omega_1}^2 + r_{\omega_2}^2 = 1 \qquad (۱۰)$$

$$r_{\phi_1}^2 + r_{\phi_2}^2 = 1 \qquad (۱۱)$$

مقدارهای r_{α_j} را می‌توان با سه زاویهٔ $\bar{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ که نشان دهنده نقاط روی سطح یک کره چهار بعدی هستند، را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\begin{cases} r_{\alpha_1} = \cos\theta_1 \\ r_{\alpha_2} = \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ r_{\alpha_3} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 \\ r_{\alpha_4} = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \end{cases} \qquad (۱۲)$$

همچنین مدول‌های کیوبیت‌های شنودگر دو دایره را نمایش می‌دهند که نقطه‌های بر روی محیط آن‌ها را با زاویه‌های Φ و Ω نمایش داد:

$$r_{\phi_1} = \cos\Phi, \quad r_{\phi_2} = \sin\Phi \qquad (۱۳)$$

$$r_{\omega_1} = \cos\Omega, \quad r_{\omega_2} = \sin\Omega \qquad (۱۴)$$

حال با جایگذاری r_{α_j} در بردارهای (۶) تا (۸)، رابطه E_{mm} به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} E_{mm} &= \max_{|\psi\rangle} \min_{\{|\psi_i\rangle\}} \left\| |\psi\rangle - \bigotimes_{i=1}^{2} |\psi_i\rangle \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \cos\theta_1 e^{i\alpha_1} \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 e^{i\alpha_2} \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3 e^{i\alpha_3} \\ \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 e^{i\alpha_4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\Phi e^{i\phi_1} \cos\Omega e^{i\omega_1} \\ \cos\Phi e^{i\phi_1} \sin\Omega e^{i\omega_2} \\ \sin\Phi e^{i\phi_2} \cos\Omega e^{i\omega_1} \\ \sin\Phi e^{i\phi_2} \sin\Omega e^{i\omega_2} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\{ 2\left[1 - \min_{\bar{\theta},\bar{\alpha}} \max_{\Phi,\Omega,\bar{\phi},\bar{\omega}} G\left(\bar{\theta},\bar{\alpha},\Phi,\Omega,\bar{\phi},\bar{\omega}\right) \right] \right\}^{1/2} \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که در آن تابع G که شنودگر کوشش می‌کند آن‌را بیشینه کند و آلیس و باب می‌خواهند آن بیشینه را کمینه کنند، به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} G\left(\bar{\theta},\bar{\alpha},\Phi,\Omega,\bar{\phi},\bar{\omega}\right) := \cos\Phi[&\cos\Omega\cos\left(\alpha_1 - \phi_1 - \omega_1\right)\cos\theta_1 \\ &+ \sin\Omega\cos\left(\alpha_2 - \phi_1 - \omega_2\right)\sin\theta_1\cos\theta_2] \\ &+ \sin\Phi[\cos\Omega\cos\left(\alpha_3 - \phi_2 - \omega_1\right)\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3 \\ &+ \sin\Omega\cos\left(\alpha_4 - \phi_2 - \omega_2\right)\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3] \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\right); \\ \bar{\phi} &= \left(\phi_1, \phi_2\right); \\ \bar{\omega} &= \left(\omega_1, \omega_2\right) \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-08]

با توجه به کران‌های G می‌توان کران‌های E_{mm} را نیز به‌دست آورد:

$$-1 \le G \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le E_{mm} \le 2$$

چون آلیس و باب می‌خواهند در معادله (۵) مقدار را بیشینه کنند کافی است بیشینه سازی را با سه فاز ثابت α_j (که تغییر آن‌ها نمی‌تواند مقدار کمینه را افزایش دهد) انجام داد. باید گفته شود که اولاً فاز کلیِ جفت $|\psi\rangle$ پیشنهاد می‌کند که آلیس و باب هیچ برتری نسبت به هم ندارند. همان‌گونه که شنودگر می‌تواند این فاز را مستقیماً باز تولید کند و ثانیاً شنودگر می‌تواند هر گیت تک کیوبیتی دیگری را بر $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ اعمال کند.

۳-۲ تعیین E_{mm} با روش جستجوی تصادفی

با در نظر گرفتن $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ۰$ و با بهینه‌سازی روی α_4 و $\bar{\theta}$، جوابی برای E_{mm} ارائه می‌دهیم که برای آن از روش جستجوی تصادفی استفاده کرده‌ایم. مقدارهای مختلف $\theta_3, \theta_2, \theta_1$ بین π و $-\pi$ و مقدار بهینه $\Omega, \Phi, \bar{\omega}, \bar{\phi}$ را با بهره‌گیری از روش جستجوی تصادفی به‌دست آورده و سپس با α_4 و مقدارهای مختلف $\theta_3, \theta_2, \theta_1$، مقدار G بهینه را به‌دست می‌آوریم و آنگاه با انتخاب این مقادیر، مقدار E و $|\psi\rangle$ بهینه را به دست می‌آوریم.

۴- نتیجه‌های تحلیل

با حل این معادله به روش ذکر شده، مشاهده شده که $E_{mm} = ۰/۷۸۱$ است. این مقدار با گزینش $\alpha_4 = ۶۲۸$ و مقدارهای $\bar{\theta}$ برابر با ۰/۶۲۸، صفر و ۱/۸۸۵- به‌دست آمده است. برای تأیید بیش‌تر نتیجه، می‌توان بیشینه‌سازی را روی پارامترهای شنودگر نیز انجام داد و همچنین مقدارهای اولیه بسیار متفاوتی را آزمایش کرد. همه این روش‌ها و مقدارهای اولیه آزمایش شده، بیشینه همانندی را برای G ارائه می‌دهند. بنابراین می‌توان گفت مابه ازای مقدارهای $\bar{\theta}$ و $\bar{\alpha}$ داده شده یک بیشینه کلی برای G به‌دست آورده‌ایم. مقدارهای بهینه به‌دست آمده برای $\bar{\theta}$ و $\bar{\alpha}$ تقریباً بر حالت زیر منطبق هستند:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.31 & 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad (۱۸)$$

همچنین به‌عنوان مثال، بهترین گزینشِ شنودگر برای این‌که حالت $|\psi\rangle$ را با حالت‌های نادرهم تنیده‌اش تقریب بزند، از مقادیر زیر برای این زوایه‌ها $\omega_1, \omega_2 \quad \phi_2, \phi_1, \Omega, \Phi$ استفاده می‌کند:

$$\omega_1 = -0.28,\ \omega_2 = -0.67,\ \phi_2 = 0.19,\ \phi_1 = -0.79,$$
$$\Omega = 1.585,\ \varphi = -0.521$$

این تقریب بر حالت زیر منطبق است:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0.01+0.01i & 0.01-0.01i & 0.09-0.89i & -0.44+0.23i \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad (۱۹)$$

تأکید می‌کنیم که اگر آلیس و باب مطابق حالتی که در معادله (۱۸) آمده، اقدام کنند، خطا در تقریب شنودگر حداقل برابر با $E_{mm} = ۰/۷۸۱$ می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از اصول مکانیک کوانتمی و روش جستجوی تصادفی با حل خطای بیشینه-کمینه نشان داده شده که درصد خطای شنودگر برای تقریب زدن حالت های درهم تنیده توسط حالت‌های ضربی افزایش می‌یابد. از یافته‌های تحلیل انجام شده می‌توان نتیجه گرفت که شنودگر هر چقدر هم تلاش کند قادر نیست به حالت‌هایی که فرستنده ارسال می‌کند، دست یابد. به بیان دیگر، با توجه به افزایش خطا در تقریب زدن حالت فرستنده، آنچه شنودگر به‌دست می‌آورد نادرست است.

مراجع

[1] C. Bennett. "*Quantum cryptography using any two non-orthogonal states*". Phys. Rev. Lett., 68:003121, 1992.

[2] H.-K. Lo. "*Proof of unconditional security of six-state quantum key distribution scheme. Quantum Information and Computation*", 1(1):81, 2001.

[3] C. Bennett and G. Brassard. *"Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing"*, Proc. Int. IEEE Conf. Computers, Sys. Signal Processing, pages 175–179, Bangalore, India, 1984.

[4] D. Mayers. *"Quantum key distribution and string oblivious transfer in noisy channels.* Proc. Crypto '96, pages 343–357, New York, 1996. Springer-Verlag.

[5] E. Biham, M. Boyer, P. Boykin, T. Mor, and V. Roychowdhury. "*A proof of the security of quantum key distribution. In Proceedings of the Thirty-Second Annual ACM Symposium on Theory of Computing*", New York, ACM Press, 2000.

[6] CAO Hai-Jing, CHEN Jing, and SONG He-Shan, "*A New Quantum Communication Scheme by Using Bell States*", Commun. Theor. Phys. (Beijing, China) Vol. 45, pp. 271–274, 2006.

[7] Yin, Zhen-Qiang, *et al*. *"A study of BB84 protocol in a device-independent scenario: from the view of entanglement distillation", Quant. Info. Comput.* 13.9-10: 827-832, 2013.

[8] Fengli Yan and Xiaoqiang Zhang, *"Secure direct communication using Einstein-Podolsky-Rosen pairs and teleportation"*, The Euro. Phy. J. B, Vol. 41, pp.75, 2004.

[9] H.-K. Lo and H.F. Chau. "*Unconditional security of quantum key distribution over arbitrarily long distances*", Science, 283:2050–2056, 1999.

[10] C. Bennett, D. DiVincenzo, J. Smolin, and W. Wootters. "*Mixed state entanglement and quantum error correction*", Phys. Rev. A, 54:3824–3851, 1996.

[11] Yuan Cao et al. *"Entanglement-based quantum key distribution with biased basis choice via free space"*, Opt. Exp., Vol. 21, Issue 22, pp. 27260-27268, 2013.

[12] Song-Kong Chong, Tzonelih Hwang, *"Quantum key agreement protocol based on BB84"*, Opt. Commun., Vol. 283, Issue 6, 15 pp. 1192-1195, 2010.

[13] Sano, Yousuke, Ryutaroh Matsumoto, and Tomohiko Uyematsu, "Secure key rate of the BB84 protocol using finite sample bits", *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical* 43.49: 495302, 2010.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-12-08]