



بیست و پنجمین کنفرانس اپتیک و  
فوتونیک ایران و یازدهمین کنفرانس  
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،  
دانشگاه شیراز،  
شیراز، ایران.  
۹-۱۱ بهمن ۱۳۹۷



## درهم تنیدگی حالت‌های همدوس فوتون-افزوده تحت میرایی دامنه

حمیدرضا کشاورز<sup>۱</sup>، غلامرضا هنرآسا<sup>۱</sup> و محمدجواد فقیهی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز

<sup>۲</sup>گروه فوتونیک، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، ماهان، کرمان

چکیده - در ارتباطات اپتیکی، میرایی دامنه ناشی از جذب فوتون‌های عبوری منشا اصلی واهمدوسی است. در این مقاله ویژگی‌های درهم تنیدگی حالت‌های همدوس فوتون-افزوده تحت میرایی دامنه با به‌کارگیری معیار توافق (تلاقی) بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش تفاوت بین فوتون‌های افزوده‌شده در دو مد، درهم تنیدگی بیشتر می‌شود.

کلید واژه- حالت‌های همدوس فوتون-افزوده، میرایی دامنه، درهم تنیدگی، توافق (تلاقی).

## Entanglement of Photon-Added Coherent States Under Amplitude Damping

Hamidreza Keshavarz<sup>1</sup>, Gholamreza Honarasa<sup>1</sup> and Mohammad Javad Faghihi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Physics, Shiraz University of Technology, Shiraz

<sup>2</sup>Department of Photonics, Faculty of New Science & Technology, Graduate University of Advanced Technology, Mahan, Kerman

**Abstract-** In optical communications, amplitude damping due to the absorption of transmitted photons is the main source of decoherence. In this paper, the entanglement properties of photon-added coherent states under amplitude damping are investigated using concurrence criterion. The results show that as the difference between photons added in the two modes increases, the entanglement increases.

**Keywords:** Photon-added coherent states, Amplitude damping, Entanglement, Concurrence.

## مقدمه

حالت‌های همدوس استاندارد در مکانیک کوانتومی نوع خاصی از حالت‌های کوانتومی تابشی هستند که دینامیک آن شبیه به رفتار نوسانی یک نوسانگر هماهنگ کلاسیک است. این حالت‌ها که به‌عنوان مبنایی برای بررسی و توصیف میدان تابشی توسط اروین شرودینگر در خلال مطالعه نوسانگر هماهنگ کوانتومی معرفی شدند [۱].

حالت‌های همدوس فوتون-افزوده که حالتی بین حالت‌های همدوس (شبیه‌ترین حالت کوانتومی به کلاسیک) و حالت‌های عددی (حالت کوانتومی خالص) به شمار می‌روند، با به‌کارگیری مکرر عملگر آفرینش روی حالت همدوس به‌دست می‌آیند. این حالت‌ها نخستین بار توسط آگروال و تارا معرفی شدند [۲]. حالت‌های همدوس فوتون-افزوده بسیار مورد توجه هستند زیرا آمار زیرپواسونی و تابع ویگنر منفی دارند و این ویژگی‌ها آن‌ها را در دسته حالت‌های غیرکلاسیکی قرار می‌دهد که برای کاربردهای اطلاعات کوانتومی بسیار مناسب هستند [۳].

پدیده درهم‌تنیدگی به هم‌بستگی بین دستگاه‌های کلاسیک و کوانتومی برمی‌گردد و این پدیده را اولین بار انیشتین، پودولسکی و روزن در سال ۱۹۳۵ در مقاله‌ی EPR بیان کردند [۴]. درهم‌تنیدگی یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های کوانتومی است و از درهم‌تنیدگی به‌عنوان یک منبع مهم و ارزشمند در انجام رایانش و مبادله اطلاعات کوانتومی استفاده می‌کنند [۵].

در متون اپتیکی میرایی دامنه به‌عنوان منبع غالبی از خطاهای ناشی از کیوبیت‌ها در نظر گرفته می‌شود [۶]. در این مقاله درهم‌تنیدگی حالت‌های همدوس فوتون-افزوده تحت میرایی دامنه را برای تعداد فوتون‌های افزوده مختلف بررسی خواهیم کرد.

## حالت‌های همدوس فوتون-افزوده

حالت‌های همدوس فوتون-افزوده به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۲]:

$$|\alpha, m\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger m} |\alpha\rangle}{m! \left[ L_m(-|\alpha|^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (1)$$

که در آن  $|\alpha\rangle$  حالت همدوس و  $L_m(x)$  چندجمله‌ای لاگر از مرتبه  $m$  است.  $\hat{a}^{\dagger m}$  عملگر آفرینش است که  $m$  مرتبه مورد استفاده قرار گرفته است. تحت میرایی دامنه، حالت‌های همدوس به‌صورت زیر گسترش می‌یابند:

$$|\alpha\rangle \rightarrow \left| \alpha e^{-\frac{1}{2}\Gamma(t)} \right\rangle = |\alpha(t)\rangle \quad (2)$$

که در آن  $\Gamma(t)$  ضریب انتقال است و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [۷]:

$$\Gamma(t) = \gamma_M \left[ 1 - e^{\omega_c t} \cos \omega_0 t - \frac{\omega_c}{\omega_0} e^{-\omega_c t} \sin \omega_0 t \right] \quad (3)$$

که در آن  $\omega_c$  فرکانس قطع،  $\omega_0$  فرکانس اولیه و  $\gamma_M$  ضریب فروپاشی آستانه است.

## درهم‌تنیدگی

در این بخش به بررسی درهم‌تنیدگی برهم‌نهی حالت‌های همدوس فوتون-افزوده تحت میرایی دامنه به‌عنوان حالت‌های دو قسمتی به‌صورت زیر می‌پردازیم:

$$|\Psi^{AB}(t)\rangle = N \left( |\alpha(t), m\rangle_A |\beta(t), n\rangle_B + |\beta(t), n\rangle_A |\alpha(t), m\rangle_B \right) \quad (4)$$

که در آن  $N$  ضریب بهنجارش است و از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$N(\alpha, m) = \left[ 1 + \frac{2e^{-\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)} \operatorname{Re}(u^* v)}{L_m(-|\alpha|^2) L_n(-|\beta|^2) m! n!} \times \left| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\alpha^* \beta)^i \beta^{m-n} (m+i)!}{i!(i+m-n)!} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

که در آن  $u$  و  $v$  ضرایب برهم‌نهی هستند و از رابطه‌ی  $|u|^2 + |v|^2 = 1$  پیروی می‌کند. ماتریس چگالی برای این

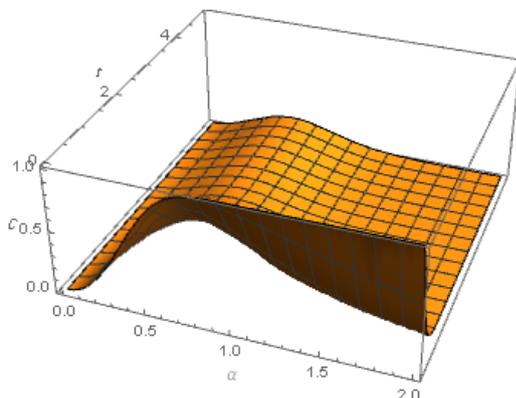
خود می‌گیرد به نحوی که صفر نشان دهنده نبود درهم‌تنیدگی و یک نشان دهنده درهم‌تنیدگی کامل است. این معیار برای ماتریس چگالی (۹) به صورت زیر بیان می‌شود [۹و۶]:

$$C = 2 \text{Max}\{0, |z| - \sqrt{bc}, |f| - \sqrt{ad}\} \quad (11)$$

### نتایج و بحث

در این قسمت به بررسی درهم‌تنیدگی برهم‌نهی حالت‌های همدوس فوتون-افزوده تحت میرایی دامنه می‌پردازیم.

در شکل ۱، ضریب تلاقی به ازای  $m=1$  و  $n=1$  بر حسب تابعی از  $\alpha$  و  $t$  رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌کنیم در  $\alpha=0$  به ازای  $t$ ‌های مختلف ضریب تلاقی صفر است که به معنای جدایی کامل حالت‌ها است. اما به مرور و با افزایش  $\alpha$  در  $t=0$  ضریب تلاقی افزایش پیدا می‌کند به طوری که در  $\alpha=0.7$  به سمت یک میل می‌کند که بیانگر درهم‌تنیدگی کامل حالت‌ها است. اما برای حالت‌هایی که میرایی دامنه داشته باشیم، با افزایش  $t$  ضریب تلاقی کاهش می‌یابد. در بازه  $\alpha=0.3$  تا  $\alpha=0.8$  ضریب تلاقی با افزایش زمان کاهش می‌یابد اما به سمت صفر میل نمی‌کند که بیانگر این است که در این بازه حالت‌ها به جدایی کامل نمی‌رسند و مقداری درهم‌تنیدگی دارند. در سایر بازه‌های  $\alpha$  همان‌طور که مشاهده می‌کنیم با افزایش زمان، ضریب تلاقی به سمت صفر میل می‌کند که نشان‌دهنده جدایی کامل حالت‌ها است.



شکل ۱: ضریب توافق بر حسب تابعی از  $\alpha$  و  $t$  به ازای  $m=1$  و  $n=1$ .

حالت‌ها بعد از میرایی دامنه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rho(t) = & N^2 [ |\alpha(t), m\rangle \langle \alpha(t), m| \langle \alpha(t), m| \langle \alpha(t), m| \\ & + |-\alpha(t), n\rangle \langle -\alpha(t), n| \langle -\alpha(t), n| \langle -\alpha(t), n| + \\ & e^{-4\alpha^2(1-e^{-\Gamma(t)})} ( |\alpha(t), m\rangle \langle \alpha(t), m| \langle -\alpha(t), n| \langle -\alpha(t), n| \\ & + |-\alpha(t), n\rangle \langle -\alpha(t), n| \langle \alpha(t), m| \langle \alpha(t), m| ) ] \end{aligned} \quad (6)$$

حالت‌های همدوس فوتون افزوده را می‌توان بر حسب حالت‌های متعامد و بهنجار  $|h\rangle$  و  $|k\rangle$  به صورت زیر بسط داد [۸و۶]:

$$\begin{aligned} |\alpha(t), m\rangle &= \mu|h\rangle + \eta|k\rangle \\ |-\alpha(t), n\rangle &= \mu|h\rangle - \eta|k\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mu &= \left( \frac{1 + \langle \alpha(t), m | -\alpha(t), n \rangle}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \eta &= \left( \frac{1 - \langle \alpha(t), m | -\alpha(t), n \rangle}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (8)$$

با جایگذاری این حالت‌ها در رابطه‌ی (۶) ماتریس چگالی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho(t) = N^2 \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & z \\ 0 & b & f & 0 \\ 0 & f^\dagger & c & 0 \\ z^\dagger & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (9)$$

که در آن  $a = (1+X)\mu^4$ ،  $b = c = f = (1-X)\mu^2\eta^2$ ،  $d = (1+X)\eta^4$  و  $z = (1+X)\mu^2\eta^2$  است.  $X$  نیز با رابطه زیر داده می‌شود:

$$X = e^{-4(|\alpha|^2)(1-e^{-\Gamma(t)})} \quad (10)$$

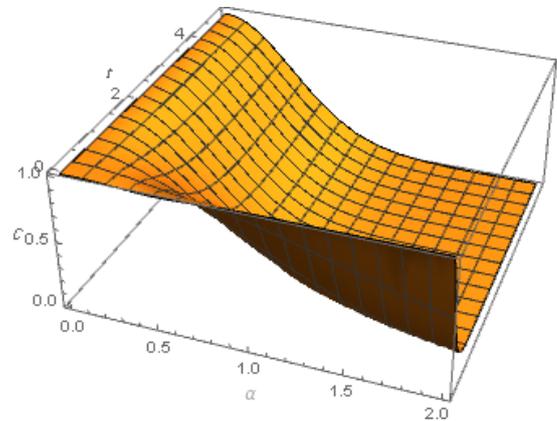
برای تعیین میزان درهم‌تنیدگی از معیار توافق یا تلاقی استفاده می‌کنیم [۵]. این معیار مقادیر بین صفر تا یک به

درهم‌تنیدگی برای حالت‌های همدوس فوتون-افزوده تحت میرایی دامنه‌های هنگامی رخ می‌دهد که  $m \neq n$  باشد، یعنی تعداد فوتون‌های زیر سیستم‌های کوانتومی حالت‌ها متفاوت باشد. به طور کلی نیز می‌توان نتیجه گرفت که هرچه تعداد فوتون‌های سامانه‌های کوانتومی را بیشتر کنیم، ضریب تلاقی مقادیر افزون‌تری پیدا می‌کند.

### مرجع‌ها

- [1] E. Schrödinger, "Der stetige Übergang von der Mikrozur Makromechanik", Naturwissenschaften, Vol. 14, pp. 664-666, 1926.
- [2] G. S. Agarwal, K. Tara, "Nonclassical properties of states generated by the excitations on a coherent state", Phys. Rev. A, Vol. 43, pp. 492-497, 1991.
- [3] F. A. Domínguez-Serna, F. J. Mendieta-Jimenez, F. Rojas, "Entangled photon-added coherent states", Quant. Inf. Proc., Vol. 15, pp. 3121-3136, 2016.
- [4] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", Phys. Rev., Vol. 47, pp. 777-780, 1935.
- [5] R. Jozsa, N. Linden, "On the role of entanglement in quantum-computational speed-up", Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci., Vol. 459, pp. 2011-2032, 2003.
- [6] R. Wickert, N. Bernardes, P. van Look, "Entanglement properties of optical coherent states under amplitude damping", Phys. Rev. A, Vol. 81, pp. 062344, 2010.
- [7] U. Weiss, "Quantum Dissipative Systems", 2nd edn. World Scientific, Singapore (1999)
- [8] A. El Allati, Y. Hassouni, N. Metwally, "Dynamics of multi-mode maximum entangled coherent state over an amplitude damping channel", Chin. Phys. B, Vol. 20, pp. 110303, 2011.
- [9] W. K. Wootters, "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits", Phys. Rev. Lett., Vol. 80, pp. 2245-2248, 1998.

در شکل ۲، تلاقی به ازای  $n=1$  و  $m=10$  بر حسب تابعی از  $\alpha$  و  $t$  شده است. در  $t=0$  ضریب تلاقی یک است که بیانگر درهم‌تنیدگی کامل حالت‌ها است. در  $\alpha=0$  نیز ضریب تلاقی در هم‌همی زمان‌ها یک است که به معنای درهم‌تنیدگی کامل حالت‌ها است. در بازه‌ی  $\alpha=0$  تا  $\alpha=1$ ، تحت میرایی دامنه ضریب تلاقی مقداری غیرصفر دارد که بیانگر مقدار اندکی درهم‌تنیدگی است. در بازه‌ی  $\alpha=1$  تا  $\alpha=2$  همانطور که مشاهده می‌کنیم تحت میرایی دامنه، ضریب تلاقی به سمت صفر میل می‌کند که به معنای جدایی کامل حالت‌ها است.



شکل ۲: ضریب توافق بر حسب تابعی از  $\alpha$  و  $t$  به ازای  $n=1$  و  $m=10$ .

### نتیجه‌گیری

در شکل ۲ ضریب تلاقی تحت میرایی دامنه مقادیر بیشتری نسبت به شکل ۱ دارد که ناشی از فوتون-افزوده‌های بیشتری است که در شکل ۲ داریم. همچنین ضریب تلاقی در شکل ۲ از یک شروع می‌شود که این امر به خاطر فوتون-افزوده‌های بیشتری است که در زیرسیستم A اضافه کرده‌ایم ( $m=10$ ). بنابراین بیشترین