

تأثیر هم‌بستگی اولیه‌ی اتم-میدان بر دینامیک توافق کوانتومی

احمد آخوند؛ آناهیتا متولی باشی*؛ عباس شکری

گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

چکیده - در این مقاله اثر هم‌بستگی اولیه‌ی اتم-میدان همراه با برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی بین کیوبیت‌های سیستم را در حوزه‌ی مارکوفی و غیر مارکوفی بررسی می‌کنیم. نتایج محاسبات انجام شده نشان می‌دهند که هم‌بستگی اولیه‌ی اتم-میدان و برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی باعث کند شدن میرایی توافق کوانتومی می‌شوند. همچنین برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی قوی همراه با تحول غیر مارکوفی مجموعه مناسبی برای حفظ و پایداری هم‌بستگی‌های کوانتومی سیستم می‌باشند.

کلید واژه- کیوبیت، درهم‌تنیدگی، تحول مارکوفی و غیر مارکوفی، توافق کوانتومی

The effect of initial System-reservoir Correlation on quantum consonance

Akhound, Ahmad; Shokri, Abbas ; Motavalli Bashi, Anahita

Department of Physics, Payame Noor University

Abstract- In this paper we investigate the effect of system-reservoir correlation and dipole-dipole interaction between two qubits on dynamics of quantum consonance in Markovian and non-Markovian regimes. The results Show that in general, the larger initial qubit-reservoir correlation and dipole-dipole interaction can retard the decay of quantum consonance. Besides, a combination of relatively strong dipole-dipole interaction and non-Markovian effect can efficiently protect quantum consonance.

Keywords: qubit, Markovian and non-Markovian regimes, quantum consonance, dipole-dipole interaction.

۱- مقدمه

می‌کنند. در نتیجه توافق کوانتومی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta = \sum_{ijmn} |\rho_{ijmn}^c| (1 - \delta_{im}) (1 - \delta_{jn}) \quad (۳)$$

که این عبارت جمع قدرمطلق عناصر قطر فرعی ماتریس تبدیل یافته ρ^c است.

۳- مدل هامیلتونی

دو کیوبیت A و B را در نظر می‌گیریم که در برهم‌کنش با یک مخزن بوزونی صفر درجه قرار دارد و برهم‌کنش بین کیوبیت‌ها نیز در نظر گرفته می‌شود. مدل هامیلتونی با توجه به $(\hbar = 1)$ به صورت زیر است [۴]:

$$H_0 = \omega_0 (\sigma_+^A \sigma_-^A + \sigma_+^B \sigma_-^B) + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k \quad (۴)$$

$$H_I = \sum_k [g_k (\sigma_-^A + \sigma_-^B) b_k^\dagger + H.c.] + d (\sigma_-^A \sigma_+^B + \sigma_+^A \sigma_-^B)$$

ω_0 فرکانس گذار بین اتم‌های دوترازه A و B است. σ_+ و σ_- عملگرهای خلق و فنا ی اتم‌ها و b_k و $b_k^\dagger$ عملگرهای خلق و فنا ی مد k-ام با فرکانس ω_k مخزن بوزونی هستند. g_k قدرت برهم‌کنش اتم با مد k-ام و d قدرت برهم‌کنش بین اتم‌ها است. حالت اولیه سیستم کل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\psi(0)\rangle = c(0) |\psi^+\rangle_{AB} |0\rangle_r + \sum_k c_k(0) |gg\rangle_{AB} |1_k\rangle_r \quad (۵)$$

که در آن $|\psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|eg\rangle_{AB} + |ge\rangle_{AB})$ حالت بل است. مجموعه حالت $|0\rangle_r = |00\dots\rangle$ نشان دهنده‌ی حالت خلاء و مجموعه حالت $|1_k\rangle_r = |00\dots 01_k 0\dots\rangle$ نیز حالتی با یک برانگیختگی در مد k-ام را نشان می‌دهد. $c_k(0) \neq 0$ حاکی از هم‌بستگی اولیه‌ی اتم-میدان است. بعد از تحول زمانی مطابق با رابطه‌ی (۴) حالت کلی سیستم با در نظر گرفتن فقط اولین برانگیختگی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$|\psi(t)\rangle = c(t) |\psi^+\rangle_{AB} |0\rangle_r + \sum_k c_k(t) |gg\rangle_{AB} |1_k\rangle_r \quad (۶)$$

با حل معادله‌ی شرودینگر در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_I(t) |\psi(t)\rangle \quad (۷)$$

$$H_I(t) = \sum_k [g_k (\sigma_-^A + \sigma_-^B) b_k^\dagger e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} + H.c.] \quad (۸)$$

روابطی برای $c(t)$ و $c_k(t)$ خواهیم یافت:

$$\dot{c}_k(t) = -i\sqrt{2}g_k e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} c(t) \quad (۹)$$

$$\dot{c}(t) = -i\sqrt{2} \sum_k kg_k^* e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} c_k(t) - idc(t) \quad (۱۰)$$

هم‌بستگی کوانتومی نوعی هم‌بستگی غیر موضعی در سیستم‌های کوانتومی است که در علم محاسبات و ارتباطات کوانتومی کاربرد دارد [۱]. یکی از معیارهای سنجش و اندازه‌گیری مقدار هم‌بستگی مذکور، درهم-تنیدگی کوانتومی است. این معیار برای تعداد زیادی از حالت‌های کوانتومی کاربرد دارد، ولی برخی از حالت‌های جدایی پذیر (غیر درهم‌تنیده) دارای هم‌بستگی کوانتومی هستند که با این معیار قابل محاسبه نیست. به همین دلیل تحقیقات جدید برای یافتن معیار مناسبی که بتواند همه-ی هم‌بستگی‌های کوانتومی سیستم را اندازه‌گیری کند، ادامه دارد. اخیراً محققان معیاری به نام کانونانس (توافق) کوانتومی معرفی کرده‌اند [۲] که در ادامه به طور مفصل به معرفی آن خواهیم پرداخت. با توجه به اهمیت تاثیر برهم‌کنش اولیه‌ی سیستم-مخزن و برهم‌کنش دو قطبی-دوقطبی کیوبیت‌ها، در این مقاله اثر آن‌ها را بر دینامیک توافق کوانتومی در دو حوزه‌ی مارکوفی و غیر مارکوفی بررسی می‌کنیم.

۲- توافق کوانتومی (۵)

برای محاسبه‌ی هم‌بستگی کوانتومی سیستم‌های دو بخشی به شکل $c = H^{(1)} \otimes H^{(2)}$ از معیار توافق کوانتومی استفاده می‌کنیم. این معیار ابتدا توسط "پ ایی" معرفی شد [۲]. از آن‌جا که هم‌بستگی کوانتومی تحت عملگرهای یکانی موضعی ناوردا باقی می‌ماند، با اعمال عملگرهای یکانی مناسب می‌توانیم هم‌بستگی‌های کلاسیکی را حذف کنیم و آنچه باقی می‌ماند هم‌بستگی‌های کوانتومی سیستم خواهد بود. برای کاهش هم‌بستگی‌های موضعی باید عبارت زیر را کمینه کرد [۳ و ۲]:

$$L(\rho) = \sum_{i \neq m} \left| \sum_{j=n} \rho_{ijmn}^c \right| + \sum_{j \neq n} \left| \sum_{i=m} \rho_{ijmn}^c \right| \quad (۱)$$

$$\rho^c = (U_1 \otimes U_2) \rho (U_1 \otimes U_2)^\dagger \quad (۲)$$

رابطه‌ی (۱) جمع عناصر غیر قطری ماتریس کاهش یافته-ی ماتریس ρ^c است که ρ^c ، ماتریس تبدیل یافته ρ تحت عملگرهای یکانی موضعی U_1 و U_2 در رابطه‌ی (۲) می‌باشد. برای سیستم‌های دو بخشی، عملگرهای یکانی U_1 و U_2 ، ماتریس‌هایی هستند که ماتریس چگالی کاهش یافته ρ_A و ماتریس چگالی کاهش یافته ρ_B از ماتریس کل ρ_{AB} را قطری نموده و رابطه‌ی (۱) را صفر

با انتگرال گیری از رابطه ی (۹) و جاگذاری در رابطه ی (۱۰) خواهیم داشت:

برای یافتن جواب تحلیلی این معادله فرض می کنیم $c_k(0) = \alpha g_k$ باشد بدین معنی که هرچه قدرت برهم-کنش اتم-میدان بیشتر باشد، احتمال برانگیختگی مد k -ام میدان نیز بیشتر می شود بنابراین رابطه ی (۱۱) به شکل زیر به دست می آید:

$$\dot{c}(t) = -\sqrt{2}i \sum_k c_k(0) g_k^* e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} - 2 \sum_k |g_k|^2 \int_0^t dt_1 e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t_1)} c(t_1) - idc(t) \quad (11)$$

اگر مدهای مخزن را نزدیک به هم فرض کنیم، می توان از حد پیوستگی $\sum_k |g_k|^2 \rightarrow \int J(\omega) d\omega$ استفاده کرد که $J(\omega)$ تابع چگالی طیفی نام دارد و شکل لورنتسی آن را به صورت $J(\omega) = \frac{\gamma_0}{2\pi} \frac{\lambda^2}{(\omega - \omega_c)^2 + \lambda^2}$ در نظر می گیریم. که در آن $\omega_c = \omega_0$ فرکانس مرکزی مخزن، λ پهنای طیف و γ_0 مربوط به درجه ی فروپاشی حالت برانگیخته ی اتم است. در اینجا دو حوزه ی دینامیکی مجزا وجود دارد. جفت شدگی ضعیف در ناحیه ی $(\gamma_0 \ll \lambda/2)$ که منجر به تحول مارکوفی سیستم می شود و جفت شدگی قوی در ناحیه ی $(\gamma_0 \gg \lambda/2)$ که منجر به تحول غیرمارکوفی سیستم می شود. با حل تابع هم بستگی مخزن که به صورت $f(t-t_1) = \int J(\omega) e^{i(\omega_0 - \omega)(t-t_1)} d\omega$ معرفی می شود عبارت $f(t) = \frac{1}{2} \gamma_0 \lambda e^{-\lambda|t|}$ به دست می آید. از طرفی با در نظر گرفتن $|c(0)|^2 + \sum_k |c_k(0)|^2 = 1$ و اینکه $c_k(0) = \alpha g_k$ مقدار $\alpha = \sqrt{2(1-|c(0)|^2)}/\gamma_0 \lambda$ به دست می آید. بنابراین رابطه ی (۱۲) به صورت زیر ساده می شود:

$$\dot{c}(t) = -\sqrt{2}i \sum_k |g_k|^2 e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} - 2 \sum_k |g_k|^2 \int_0^t dt_1 e^{i(\omega_0 - \omega_k)(t-t_1)} c(t_1) - idc(t) \quad (12)$$

رابطه ی (۱۲) به صورت زیر ساده می شود:

$$\dot{c}(t) = -idc(t) - \sqrt{2}i\alpha f(t) - 2 \int_0^t dt_1 f(t-t_1) c(t_1) \quad (13)$$

معادله ی دیفرانسیل انتگرالی فوق را می توان بوسیله ی تبدیلات لاپلاس حل کرد که رابطه ی زیر برای $c(t)$ به دست می آید:

$$c(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}(p+\beta)}}{2\beta} \left\{ -2b(1-e^{\beta t}) + c(0) \left[p(1-e^{\beta t}) + \beta(1+e^{\beta t}) \right] \right\} \quad (14)$$

که در آن $p = \lambda + id$ و $\beta = \sqrt{p^2 - 4\lambda(\gamma_0 + id)}$ و $b = \lambda \left[c(0) - i \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \gamma_0 \right]$ با استفاده از پایه های

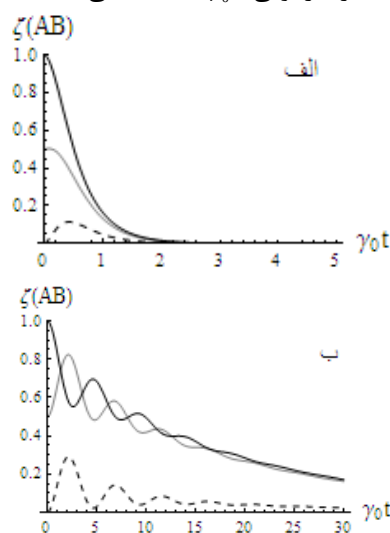
$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} 1-|c(t)|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |c(t)|^2/2 & |c(t)|^2/2 & 0 \\ 0 & |c(t)|^2/2 & |c(t)|^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

با استفاده از روابط (۱) تا (۳)، مقدار توافق کوانتومی برای ماتریس چگالی بالا حاصل می شود:

$$Q_{\zeta}(\rho_{AB}) = |c(t)|^2 \quad (16)$$

۴- تاثیر هم بستگی اولیه اتم-میدان بر توافق کوانتومی

برای بررسی تاثیر هم بستگی اولیه اتم-میدان، برهم کنش دوقطبی-دوقطبی بین کیوبیت ها را ثابت $(d = \gamma_0)$ در نظر می گیریم. در شکل ۱ منحنی توافق کوانتومی اتم های A و B برای میزان هم بستگی های اولیه اتم-میدان رسم شده است به گونه ای که برای $c(0) = 0$ منحنی خط چین و برای $c(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ منحنی خاکستری و برای $c(0) = 1$ منحنی پررنگ رسم شده است. شکل (الف) مربوط به حوزه ی مارکوفی $(\lambda = 5\gamma_0)$ و شکل (ب) مربوط به حوزه ی غیر مارکوفی $(\lambda = 0.2\gamma_0)$ می باشد



شکل ۱: منحنی توافق کوانتومی بین کیوبیت های A و B برای (الف): حوزه ی مارکوفی و (ب): حوزه ی غیر مارکوفی. در هر دو شکل برهم-کنش دو قطبی-دوقطبی بین اتم ها وجود دارد $(d = \gamma_0)$. منحنی خط چین برای بیشترین هم بستگی اولیه سیستم-مخزن

شکل ۲: منحنی توافق کوانتومی اتم‌های B و A در (الف) حوزه‌ی مارکوفی و (ب) غیر مارکوفی به‌ازای $c(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ برای سه قدرت برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی $d = \gamma_0$ منحنی خط‌چین، و $d = 5\gamma_0$ منحنی خاکستری و $d = 10\gamma_0$ منحنی پررنگ.

همین طور افزایش قدرت برهم‌کنش در حوزه غیر مارکوفی سبب پایداری توافق در سیستم دو کیوبیت B و A می‌شود.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله اثر هم‌زمان برهم‌کنش اولیه اتم-میدان و برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی دو کیوبیت در حوزه‌ی مارکوفی و غیر مارکوفی، به‌وسیله توافق کوانتومی بررسی شد. هنگامی که قدرت برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی سیستم ثابت باشد، هم‌بستگی اولیه‌ی قوی اتم-میدان باعث تولید توافق و کندی میرایی آن می‌شود. هم‌چنین هنگامی که برهم‌کنش کیوبیت-میدان ثابت باشد، هرچقدر برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی کیوبیت‌ها قوی‌تر باشد هم-بستگی توافق کوانتومی سیستم پایدارتر خواهد بود. هم-چنین نشان دادیم که ترکیب حوزه‌ی غیرمارکوفی و برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی قوی می‌تواند عامل مفیدی برای حفظ هم‌بستگی توافق سیستم شود.

مرجع‌ها

- [۱] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., Horodecki, K.: Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009)
- [۲] P. Pei, Wei Wang, Chong Li, He-Shan Song, Interant. J. Theoret. Phys. 51(2012)3350
- [۳] T. Gebremaryam, W. Li, and C. Li, Physica A457 (2016)437- 442
- [۴] G.Y.Wang, Y.N.Guo Int J Theor Phys, 56 (2017) 1585

($c(0) = 0$)، منحنی خاکستری برای $c(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و منحنی توپر برای کمترین هم‌بستگی اولیه سیستم-مخزن $c(0) = 1$.

در شکل (الف) ماکزیمم هم‌بستگی اولیه سیستم-مخزن (منحنی خط چین) باعث تولید هم‌بستگی توافق کوانتومی از مقدار صفر به ماکزیمم می‌شود و سپس با شیب ملایمی به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین هم‌بستگی اولیه‌ی سیستم-مخزن باعث تولید توافق و کندی میرایی آن می‌شود. در حوزه‌ی مارکوفی توافق بعد از مدت کوتاهی به-شدت میرا می‌شود و همان‌طور که انتظار داریم در حوزه‌ی غیر مارکوفی به‌صورت نوسانی کاهش می‌یابد که حاکی از برگشت اطلاعات به سیستم می‌باشد.

۵- تاثیر برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی اتم-

ها بر توافق کوانتومی

برای بررسی تاثیر برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی اتم‌ها، برهم‌کنش اولیه سیستم-میدان را ($c(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$) در نظر می‌گیریم. شکل‌ها برای سه قدرت برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی $d = \gamma_0$ منحنی خط چین، و $d = 5\gamma_0$ منحنی خاکستری و $d = 10\gamma_0$ منحنی پررنگ رسم شده است. شکل‌های (الف) برای حوزه‌ی مارکوفی و (ب) برای حوزه‌ی غیر مارکوفی، شکل شماره (۲) منحنی توافق اتم‌های B و A می‌باشد.

افزایش قدرت برهم‌کنش دوقطبی-دوقطبی اتم‌ها باعث افزایش هم‌بستگی توافق کوانتومی اتم‌های B و A می‌شود

