



## کوانتش کانونیک میدان الکترومغناطیس در حضور یک تیغه نامتناهی ماده مغناطو- دی الکتریک دونا همسانگرد جاذب قرار داده شده بین دو رسانای کامل نامتناهی تخت و موازی

علی شوقی ، مجید عموشاهی

دانشگاه اصفهان-گروه فیزیک

چکیده- با مدل سازی یک تیغه نامتناهی ماده مغناطو-دی الکتریک جاذب و دو ناهمسانگرد، قرار داده شده بین دو رسانای نامتناهی تخت و موازی ، یک کوانتش کانونیک از میدان الکترومغناطیس در حضور این تیغه بعمل می آید. قانون گوس و معادلات ماکسول به عنوان معادلات اولر-لاگرانژ استخراج می شوند. معادلات اولر-لاگرانژ نوسانگرهایی که تیغه مغناطو-دی الکتریک را مدل سازی می کنند معادلات ساختارمندی تیغه را بدست می دهند. تانسورهای نفوذ پذیری الکتریکی و مغناطیسی تیغه مغناطو-دی الکتریک بر حسب تانسورهای جفت کننده تیغه مغناطو-دی الکتریک و میدان الکترومغناطیس بدست می آیند. بسط متغیرهای دینامیکی میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطو-دی الکتریک بر حسب ویژه مد های ناحیه بین دو رسانا ارائه می شود و عملگرهای نردبانی میدان الکترومغناطیس و نوسانگرهایی که ماده را مدل سازی می کنند معرفی می شوند.

کلید واژه ها - کوانتش کانونیک، تیغه مغناطو دی الکتریک دو ناهمسانگرد، معادلات ساختارمندی، تانسورهای نفوذ پذیری، تانسورهای جفت کننده

## Canonical quantization of electromagnetic field in the presence of a bi-anisotropic absorbing magneto-dielectric slab between two parallel perfectly conducting plates

Ali Shoghi , Majid Amooshahi

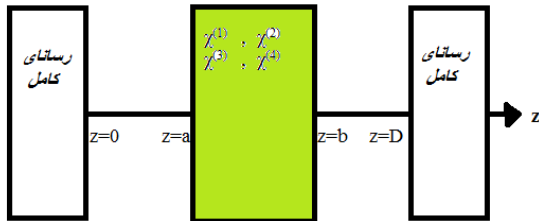
Department of Physics , University of Isfahan

Abstract- Modeling a bi-anisotropic absorbing magneto-dielectric slab by two continuum collections of the space-time dependent harmonic oscillators , a fully canonical quantization of electromagnetic field is achieved in the presence of such a magneto-dielectric slab inserted between two parallel perfectly conducting plates. The Gauss and Maxwell's laws are obtained as the classical Euler-Lagrange equations of the total system. Also the constitutive relations of the magneto-dielectric slab are obtained using the classical Euler-Lagrange equations of the harmonic oscillators modeling the magneto-dielectric slab. The electric and magnetic susceptibility tensors of the bi-anisotropic magneto-dielectric slab are expressed in terms of the coupling tensors that couple the electromagnetic field to the magneto-dielectric slab. The mode expansions of dynamical variables of the electromagnetic field and the magneto-dielectric slab are given and the ladder operators of the total system are introduced.

Keywords: Canonical quantization, Bi- anisotropic magneto-dielectric slab , Constitutive relations, Susceptibility tensors, Coupling tensors.

## ۱- مقدمه

که  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  و  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  به ترتیب میدان های الکتریکی و مغناطیسی هستند که برحسب پتانسیل های اسکالر  $\phi$  و برداری  $\vec{A}$  نوشته می شوند. در چگالی لاگرانژی (۴)  $f_i, g_i \quad i = 1, 2$  تانسور های جفت کننده میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطو دی-الکتریک دونا همسانگرد است.



شکل ۱: سیستم کل شامل میدان الکترومغناطیس و تیغه ی نامتناهی مغناطو-دی الکتریک دونا همسانگرد جاذب بین دو صفحه رسانای کامل نامتناهی.

با استفاده از چگالی های لاگرانژی (۲)، (۳) و (۴) معادلات اویلر-لاگرانژ برای پتانسیل های اسکالر  $\phi$  و برداری  $\vec{A}$  به ترتیب به قانون گاوس و قانون ماکسول منجر می شوند.

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 0 \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \quad (6)$$

که در آنها  $\vec{P}, \vec{M}$  به ترتیب چگالی های قطبش الکتریکی و مغناطیسی ماده هستند و برحسب نوسانگرهایی که ماده مغناطودی-الکتریک را مدل سازی می کنند و تانسورهای جفت کننده میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطودی-الکتریک به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \int_0^{+\infty} d\omega \sum_{i=1}^2 f_i(\omega, \vec{r}) \cdot \vec{X}_{\omega}^{(i)}(\vec{r}, t) \quad (7)$$

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \int_0^{+\infty} d\omega \sum_{i=1}^2 g_i(\omega, \vec{r}) \cdot \vec{X}_{\omega}^{(i)}(\vec{r}, t)$$

همچنین معادلات اویلر-لاگرانژ برای نوسانگرهایی که ماده را مدل سازی می کنند به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{X}}_{\omega}^{(i)}(\vec{r}, t) + \omega^2 \vec{X}_{\omega}^{(i)}(\vec{r}, t) \\ = f_i^t(\omega, \vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) + g_i^t(\omega, \vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (8)$$

در سال های اخیر یک روش کوانتش کاملا کانونیک از میدان الکترومغناطیس در حضور ماده مغناطو-دی الکتریک جاذب ارائه شده است [۱]، [۲]، [۳]. در این روش ماده را با دو مجموعه پیوستار و مستقل از نوسانگرهای هارمونیک سه بعدی مدل سازی می کنند. یکی از این مجموعه ها قطبش پذیری ماده و دیگری مغناطش پذیری ماده را توصیف می کند. معادلات ماکسول و معادلات ساختارمندی ماده به کمک معادلات اولر-لاگرانژ کل سیستم بدست می آید. تانسورهای نفوذ پذیری الکتریکی و مغناطیسی ماده بر حسب تانسورهای جفت کننده ماده و میدان الکترومغناطیس بدست می آیند. قطبش های الکتریکی و مغناطیسی نوفه بر حسب تانسورهای جفت کننده ماده و میدان الکترومغناطیس و نوسانگرهایی که ماده را مدل سازی می کنند در  $t=0$  بدست می آیند.

## ۲- معادلات اویلر-لاگرانژ

لاگرانژی کل سیستم ( میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطو-دی الکتریک جاذب دونا همسانگرد) به صورت زیر پیشنهاد می شود:

$$L(t) = \int_V d^3r [l_s + l_{em} + l_{int}]. \quad (1)$$

که در آن  $V$  حجم بین دو رسانای کامل تخت و موازی در شکل (۱) می باشد.  $l_s, l_{em}, l_{int}$  به ترتیب چگالی های لاگرانژی ماده مغناطودی-الکتریک، میدان الکترومغناطیس و برهمکنش بین آنها است و به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} l_s = \int_0^{+\infty} d\omega \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{1}{2} \dot{\vec{X}}_{\omega}^{(i)}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{X}}_{\omega}^{(i)}(\vec{r}, t) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \omega^2 \vec{X}_{\omega}^{(i)}(\vec{r}, t) \cdot \vec{X}_{\omega}^{(i)}(\vec{r}, t) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

$$l_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 - \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} l_{int} = \int_0^{+\infty} d\omega \sum_{i=1}^2 \sum_{m,n=1}^3 f_i^{mn}(\omega, \vec{r}) E_m(\vec{r}, t) X_{\omega n}^{(i)}(\vec{r}, t) \\ + \int_0^{+\infty} d\omega \sum_{i=1}^2 \sum_{m,n=1}^3 g_i^{mn}(\omega, \vec{r}) B_m(\vec{r}, t) X_{\omega n}^{(i)}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (4)$$

که در این رابطه بالا نویس  $t$  نشانگر ترانهاده است. پاسخ معادله (۸) به شکل زیر است:

که در این رابطه بالا نویس  $t$  نشانگر ترانهاده است. پاسخ معادله (۸) به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \bar{X}_\omega^{(i)}(\bar{r}, t) &= \bar{X}_\omega^{(i)}(\bar{r}, 0) \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\omega} \dot{\bar{X}}_\omega^{(i)}(\bar{r}, 0) \\ &+ \int_0^t dt' \frac{\sin \omega(t-t')}{\omega} [f_i^t(\omega, \bar{r}) \cdot \bar{E}(\bar{r}, t') + g_i^t(\omega, \bar{r}) \cdot \bar{B}(\bar{r}, t')]. \end{aligned} \quad (9)$$

با جایگذاری (۹) در (۷) روابط ساختارمندی به شکل زیر می شوند:

$$\begin{aligned} G(\bar{r}, \bar{r}') &= \frac{1}{2\pi^2 D} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^2 k \left[ \frac{\exp(i\bar{k} \cdot (\bar{r} - \bar{r}'))}{k_x^2 + k_y^2 + (\frac{n\pi}{D})^2} \right. \\ &\times \left. \sin(\frac{n\pi z}{D}) \sin(\frac{n\pi z'}{D}) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{P}(\bar{r}, t) &= \bar{P}_N(\bar{r}, t) + \int_0^t dt' [\chi^{(1)}(\bar{r}, |t-t') \cdot \bar{E}(\bar{r}, \pm t') \\ &+ \chi^{(2)}(\bar{r}, |t-t') \cdot \bar{B}(\bar{r}, \pm t')], \\ \bar{M}(\bar{r}, t) &= \bar{M}_N(\bar{r}, t) + \int_0^t dt' [\chi^{(3)}(\bar{r}, |t-t') \cdot \bar{E}(\bar{r}, \pm t') \\ &+ \chi^{(4)}(\bar{r}, |t-t') \cdot \bar{B}(\bar{r}, \pm t')]. \end{aligned} \quad (10)$$

در این رابطه  $d^2 k = dk_x dk_y$  و  $k = k_x \hat{i} + k_y \hat{j}$  و  $\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$  است. با جایگذاری  $\varphi$  از معادله (۱۱) در لاگرانژی (۴) و استفاده از پیمانانه کولمب  $\bar{V} \cdot \bar{A} = 0$  و انتگرال گیری جز به جز به عبارت زیر برای لاگرانژی کل سیستم می رسمیم:

علامت های مثبت (منفی) به ترتیب برای  $t > 0$  ( $t < 0$ ) هستند و تانسور های  $\chi^{(i)}, i=1,2,3,4$  تانسورهای پذیرفتاری ماده هستند. و در مرجع [۲] بر حسب تانسورهای جفت کننده  $f_i, g_i, i=1,2$  معرفی شده اند. در معادله (۱۰)  $\bar{M}_N, \bar{P}_N$  میدان های قطبش الکتریکی و مغناطیسی نوفه هستند که بر حسب تانسورهای جفت کننده  $f_i, g_i, i=1,2$  و نوسانگرهایی که ماده را مدل سازی می کنند بدست می آیند [۲].

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_V d^3 r \left[ \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{(\bar{V} \times \bar{A})^2}{2\mu_0} - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \cdot \bar{P}^T + (\bar{V} \times \bar{A}) \cdot \bar{M} \right] \\ &+ \int_V d^3 r \int_0^{+\infty} d\omega \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{1}{2} (\dot{\bar{X}}_\omega^{(i)})^2 - \frac{1}{2} \omega^2 (\bar{X}_\omega^{(i)})^2 \right] \\ &- \frac{1}{2\epsilon_0} \int_V d^3 r \int_V d^3 r' G(\bar{r}, \bar{r}') \bar{V} \cdot \bar{P}(\bar{r}, t) \bar{V}' \cdot \bar{P}'(\bar{r}', t) \end{aligned} \quad (12)$$

که میدان های قطبش و مغناطش با معادلات (۷) داده شده اند و عبارت  $\bar{P}^T$  مولفه عرضی بردار قطبش می باشد و بصورت زیر تعریف می شود:

### ۳- کوانتس کانونیک

در این بخش یک کوانتس کانونیک برای میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطودی-الکتریک بعمل می آید برای این منظور از پیمانانه کولمب ( $\bar{V} \cdot \bar{A} = 0$ ) استفاده می کنیم و درجه آزادی اضافی پتانسیل اسکالر  $\varphi$  را به کمک قانون گوس (۵) از لاگرانژی سیستم حذف می کنیم. با استفاده از قانون گوس (۵) می توان پتانسیل اسکالر  $\varphi$  را به صورت زیر بر حسب چگالی بارهای الکتریکی قطبشی القا شده در ماده مغناطودی-الکتریک نوشت:

$$-\bar{D} = \epsilon_0 \dot{\bar{A}} - \bar{P}^T \quad (14)$$

$$\bar{Q}_\omega^{(i)} = \dot{\bar{X}}_\omega^{(i)} \quad i=1,2 \quad (15)$$

در این بخش یک کوانتس کانونیک برای میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطودی-الکتریک بعمل می آید برای این منظور از پیمانانه کولمب ( $\bar{V} \cdot \bar{A} = 0$ ) استفاده می کنیم و درجه آزادی اضافی پتانسیل اسکالر  $\varphi$  را به کمک قانون گوس (۵) از لاگرانژی سیستم حذف می کنیم. با استفاده از قانون گوس (۵) می توان پتانسیل اسکالر  $\varphi$  را به صورت زیر بر حسب چگالی بارهای الکتریکی قطبشی القا شده در ماده مغناطودی-الکتریک نوشت:

$$\varphi(\bar{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_V d^3 r' G(\bar{r}, \bar{r}') \bar{V}' \cdot \bar{P}'(\bar{r}', t) \quad (11)$$

که در آن  $\omega_n(\vec{k}^{\parallel}) = C\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + (\frac{n\pi}{D})^2}$  است و مو لفه های دکارتی ویژه بردارهای  $(\vec{k}^{\parallel}, r)$  به  $\vec{V}_{n,\lambda}$  صورت زیر داده می شوند:

$$[V_{n,\lambda}(\vec{k}^{\parallel}, \vec{r})]_j = e_j(\lambda, n, \vec{k}^{\parallel}) f_j(n, \vec{r}) \quad j, \lambda = 1, 2, 3$$

$$f_1(n, \vec{r}) = f_2(n, \vec{r}) = -i \exp(i\vec{k}^{\parallel} \cdot \vec{r}) \sin(\frac{n\pi z}{D})$$

$$f_3(n, \vec{r}) = \exp(i\vec{k}^{\parallel} \cdot \vec{r}) \cos(\frac{n\pi z}{D})$$

که در آن  $\vec{e}(\lambda, n, \vec{k}^{\parallel})$   $\lambda = 1, 2$  برای هر  $n, \vec{k}^{\parallel}$  دو بردار واحد متعامد هستند و هر دو بر بردار واحد

$$\vec{e}(3, n, \vec{k}^{\parallel}) = \frac{\vec{k}^{\parallel} - \frac{n\pi}{D} \hat{z}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \frac{n^2 \pi^2}{D^2}}}$$

عمود هستند.

در بسط های (۱۷) و (۱۸) عملگرهای نردبانی متغیرهای دینامیکی میدان الکترومغناطیس و ماده در روابط جابجایی زیر صدق می کنند:

$$[a_{n,\lambda}(\vec{k}^{\parallel}, t), a_{n',\lambda'}^*(\vec{k}', t)] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta(\vec{k}^{\parallel} - \vec{k}')$$

$$[b_{n,\lambda}^{(i)}(\omega, \vec{k}^{\parallel}, t), (b_{n',\lambda'}^{(j)})^*(\omega', \vec{k}', t)] = \delta_{ij}$$

$$\times \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k}^{\parallel} - \vec{k}')$$

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله با تعمیم روش ارائه شده در مراجع یک کوانتس کاملاً کانونیک از میدان الکترومغناطیس در حضور یک تیغه نامتناهی ماده مغناطی-دی الکتریک جاذب دو ناهمسانگرد قرار داده شده بین دو رسانای کامل تخت و موازی ارائه شده است.

#### مراجع

- [1] M. Amooshahi, J. Math. Phys. 50, 062301 (2009).
- [2] M. Amooshahi, Eur. Phys. J. D, 69:66 (2015).
- [3] M. Amooshahi, Int.J. Theor. Phys 55 ,3761-3776(2016).

اکنون با داشتن متغیرهای همیوگ کل سیستم در معادلات (۱۴) و (۱۵) روابط جابجایی زیر روی آنها اعمال می شود:

$$[\vec{X}_\omega^{(i)}(\vec{r}, t), \vec{Q}_{\omega'}^{(j)}(\vec{r}', t)] = i\hbar I \delta_{ij} \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$[A_i(\vec{r}, t), -D_j(\vec{r}', t)] = i\hbar \delta_{ij}^T(\vec{r}, \vec{r}') \quad (16)$$

اکنون به کمک هامیلتونی کل سیستم:

$$H(t) = \int_V d^3r [ \int_0^{+\infty} d\omega \sum_{i=1}^2 \vec{Q}_\omega^{(i)} \cdot \dot{\vec{X}}_\omega^{(i)} - \vec{D} \cdot \dot{\vec{A}} ] - L(t)$$

و روابط جابجایی (۱۶) می توان نشان داد معادله ماکسول (۶) و معادلات ساختارمندی (۱۰) در تصویر هایزنبرگ معتبر باقی می ماند. بسط متغیرهای دینامیکی همیوگ میدان الکترومغناطیس و ماده مغناطی-دی الکتریک بر حسب مدهای ناحیه بین دو رسانا در شکل (۱) به شکل زیر است:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int d^2k \sqrt{\frac{\hbar}{(2\pi)^2 D \omega_n(\vec{k}^{\parallel}) \epsilon_0}} \times$$

$$[a_{n,\lambda}(\vec{k}^{\parallel}, t) \vec{V}_{n,\lambda}(\vec{k}^{\parallel}, \vec{r}) + a_{n,\lambda}^*(\vec{k}^{\parallel}, t) \vec{V}_{n,\lambda}^*(\vec{k}^{\parallel}, \vec{r})]$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = -i \sum_{\lambda=1}^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \int d^2k \sqrt{\frac{\hbar \omega_n(\vec{k}^{\parallel}) \epsilon_0}{(2\pi)^2 D}} \times$$

$$[a_{n,\lambda}^*(\vec{k}^{\parallel}, t) \vec{V}_{n,\lambda}^*(\vec{k}^{\parallel}, \vec{r}) - a_{n,\lambda}(\vec{k}^{\parallel}, t) \vec{V}_{n,\lambda}(\vec{k}^{\parallel}, \vec{r})] \quad (17)$$

$$\vec{X}_\omega^{(i)}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^2k \sqrt{\frac{\hbar}{(2\pi)^2 D \omega}} \times$$

$$[b_{n,\lambda}^{(i)}(\vec{k}^{\parallel}, t) \vec{V}_{n,\lambda}(\vec{k}^{\parallel}, \vec{r}) + (b_{n,\lambda}^{(i)})^*(\vec{k}^{\parallel}, t) \vec{V}_{n,\lambda}^*(\vec{k}^{\parallel}, \vec{r})]$$

$$\vec{Q}_\omega^{(i)}(\vec{r}, t) = -i \sum_{\lambda=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^2k \sqrt{\frac{\hbar \omega}{(2\pi)^2 D}} \times$$

$$[b_{n,\lambda}^{(i)}(\vec{k}^{\parallel}, t) \vec{V}_{n,\lambda}(\vec{k}^{\parallel}, \vec{r}) - (b_{n,\lambda}^{(i)})^\tau(\vec{k}^{\parallel}, t) \vec{V}_{n,\lambda}^*(\vec{k}^{\parallel}, \vec{r})]$$

(۱۸)