بهینه‌سازی آرایش ثبت توری تداخلی با استفاده از طرح ماره

محمد یگانه[۱]، پوریا علی‌زاده ایردموسی و سیف‌اله رسولی[۱و۲*]

۱- دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان، زنجان

۲- مرکز پژوهشی اپتیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه‌ی زنجان، زنجان

* نویسنده مسئول: rasouli@iasbs.ac.ir

چکیده – الگوی تداخلی حاصل از دو میدان همدوس تخت و غیرهم‌راستا در حالت کلی یک سری خطوط موازی است. گام و راستای این خطوط علاوه بر زاویه مابین باریکه‌ها و طول‌موج آنها، به شکل دقیقِ جبهه‌ی موج آن دو نیز بستگی دارد. اگر حداقل جبهه‌ی موج یکی از دو چشمه کاملاً تخت نباشد، انحراف بسیار جزئی در فریزهای نهایی از الگوی کاملاً منظم مورد انتظار، ایجاد خواهد شد. در این کار با بررسی نقش ماره‌ی ناشی از الگوی تداخلی ایجاد شده با یک کپی از خودش، مشخصات جبهه‌های موج ایجاد کننده‌ی نقش تداخلی که شامل زاویه‌ی نسبی آنها نسبت به‌هم و میزان واگرایی (یا هم‌گرایی) آنها است را به‌صورت نظری و تجربی به‌دست می‌آوریم، آنگاه با اعمال تغییرات لازم، آرایش ثبت توری تداخلی را برای ثبت توری خطی مهیا می‌کنیم. امکان حذف بیشینه انحنای خطوط از مرتبه‌ی حتی تا چندصد متر با این روش امکان پذیر است. تحلیل نقش ماره با استفاده از بردار وارون و در فضای فرکانسی انجام شده است.

کلید واژه- بردار وارون توری، تکنیک ماره، فریزهای تداخلی.

Optimization of the recording setup for interference gratings by moiré technique

Mohammad Yeganeh[1], Pouria Alizadeh Irdemusa[1], and Saifollah Rasouli[1, 2*]

1- Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran,
2- Optics Research Center, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran

(*Corresponding author: rasouli@iasbs.ac.ir)

Abstract- The interference pattern formed by the two-beam interferometry consists a series of parallel lines. The direction and period of these lines, in addition to the angle between the beams and their wavelengths, is also closely related to the wavefront forms of the beams. If at least one of the two wavefronts is not completely plane, a slight difference from the parallel lines pattern is expected. In this study, by examining moiré pattern of the resulting interference pattern with a copy of itself, the characteristics of the wavefronts such their convergence are determined by using reciprocal vectors approach. We show that, with this method one can remove a maximum curvature of the interference fringes of a several hundred meters.

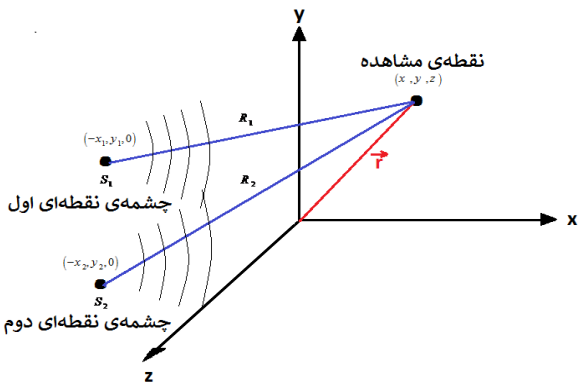
Keywords: interfering fringes, moiré technique, reciprocal vector approach.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from opsi.ir on 2026-10-31]

۱- مقدمه

الگوی تداخلی ناشی از تداخل دو باریکه‌ی نور همدوس به توزیع فاز دو باریکه و موقعیت نسبی آن دو بستگی دارد[۱]. اگر جبهه‌ی موج دو باریکه‌ی نوری کاملاً مشابه هم باشد و دو باریکه به‌صورت هم‌محور و کاملاً موازی یکدیگر باشند، الگوی تداخلی، طرح یکنواخت خواهد داشت. زاویه‌ی نسبی دو باریکه باعث ایجاد فریزهای تداخلی خواهد شد که به شکل خطوط کاملاً موازی و هم‌فاصله است. اگر حداقل یکی از دو باریکه، جبهه‌ی موج کروی داشته باشد، فریزهای تداخلی به شکل الگوی فرنل درخواهد آمد. هم‌محور بودن دو باریکه منجر به الگوی فرنل به مرکزیت محور مشترک دو باریکه و متقاطع بودن باریکه‌ها باعث خواهد گردید تا مرکز الگوی فرنل جابه‌جا شود و محدودیت ابعاد باریکه‌ها تنها بخش کناری الگوی فرنل را ایجاد خواهد کرد. در این حالت، اگر باریکه‌های اولیه انحرافات جزئی از باریکه‌ی تخت داشته باشند و زاویه‌ی دو باریکه به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، الگوی تداخلی تفاوت چندانی با فریزهای موازی نخواهد داشت، زیرا تنها لبه‌های الگوی فرنل با شعاع نسبتاً بزرگ در الگوی تداخلی دیده می‌شود که هم تقریباً هم‌گام و هم تقریباً به‌شکل خطوط راست است. از آنجا که تکنیک ماره برای بزرگ‌نمایی ساختارهای تناوبی و یا شبه‌تناوبی، ابزار بسیار مناسب و قدرتمندی است، می‌توانیم برای مشخصه‌یابی این الگوی تداخلی از نقش ماره‌ی آن بهره گیریم. در این کار، فرمول‌بندی نقش ماره برای این ساختار با استفاده از بردار وارون توری صورت گرفته که برای ساختارهای تناوبی کندتغییر ابزار قدرتمند و شناخته‌شده‌ای است[۲-۴].



شکل۱: نمایش موقعیت دو چشمه‌ی نقطه‌ای و نقطه‌ی مشاهده.

۲- تئوری

برای به‌دست آوردن فاز الگوی تداخلی دو باریکه‌ی نوری، دو چشمه‌ی نور نقطه‌ای را در دستگاه مختصات دکارتی در موقعیت‌های $(-x_{1,2}, y_{1,2}, 0)$ درنظر می‌گیریم. مطابق شکل۱، در نقطه‌ی مشاهده‌ی (x, y, z)، برای فاز دو باریکه‌ی نوری داریم:

$$\phi_1 = \vec{\mathbf{k}_1}.\vec{\mathbf{r}} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{(x+x_1)x+(y-y_1)y+z^2}{\sqrt{(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2}},$$
$$\phi_2 = \vec{\mathbf{k}_2}.\vec{\mathbf{r}} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{(x+x_2)x+(y-y_2)y+z^2}{\sqrt{(x+x_2)^2+(y-y_2)^2+z^2}}. \quad (۱)$$

فاز الگوی تداخلی از تفاضل فاز دو جبهه‌ی موج اولیه به‌دست می‌آید ($\phi = \phi_1 - \phi_2$):

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{(x+x_1)x}{R_1}+\frac{(y-y_1)y}{R_1} + \frac{z^2}{R_1}-\frac{(x+x_2)x}{R_2}-\frac{(y-y_2)y}{R_2}-\frac{z^2}{R_2}\right], \quad (۲)$$

که در آن داریم:

$$R_1 = \sqrt{(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+z^2},$$
$$R_2 = \sqrt{(x+x_2)^2+(y-y_2)^2+z^2}. \quad (۳)$$

با فرض اینکه فاصله‌های دو منبع نقطه‌ای تا نقطه‌ی مشاهده نسبت به فاصله‌ی عرضی دو منبع خیلی زیادتر است ($|x_1|, |x_2| \ll |y_1|, |y_2|$)، با بسط R_1 و R_2 در رابطه‌ی(۳) و قرار دادن جواب آن در رابطه‌ی(۲) و با حذف جملات مرتبه‌ی ۲ و بالاتر از عبارت $(\frac{1}{x})$، داریم:

$$\phi \cong \frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(\frac{y^2+z^2}{x_1}-\frac{y^2+z^2}{x_2}\right)-\left(\frac{yy_1}{x_1}+\frac{yy_2}{x_2}\right)\right]. \quad (۴)$$

اگر فرض کنیم منبع نقطه‌ای دوم در بی‌نهایت باشد ($x_2 \to \infty$)، داریم:

$$\phi \cong \frac{2\pi}{\lambda}\left[\frac{y^2}{x_1}+\frac{z^2}{x_1}-\frac{yy_1}{x_1}\right] = \frac{\pi}{s}\rho^2 \mp \frac{2\pi}{\Lambda}y, \quad (۵)$$

که در آن:

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from opsi.ir on 2026-10-31]

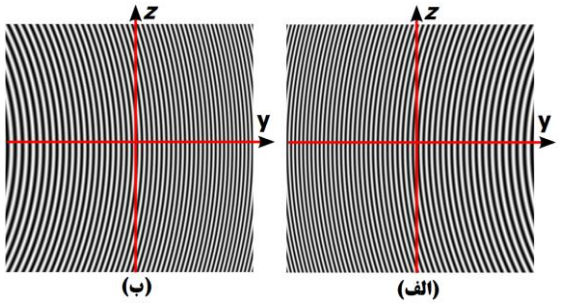
$$s=\frac{\lambda x_1}{2},\Lambda=\pm\frac{\lambda}{y_1}x_1,\qquad x_1>0. \tag{۶}$$

علامت بالا (پایین) برای y_1های مثبت (منفی) است. همچنین $\rho=(y^2+z^2)^{1/2}$ مختصه‌ی شعاعی در نقطه‌ی مشاهده و در صفحه‌ی عمود بر محور xهاست. زاویه‌ی دو باریکه نیز از رابطه‌ی $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$ به‌دست می‌آید. رابطه‌ی(۵) دارای دو بخش است: بخش اول بیانگر فاز الگوی فرنل دوبعدی و بخش دوم بیانگر فاز خطی است. وجود هم‌زمان دو جمله، یک بخش از الگوی فرنل را نشان می‌دهد که در آن مرکز دستگاه مختصات منطبق بر مرکز واقعی الگوی فرنل نیست.

در ادامه، به فرمول‌بندی الگوی ماره ناشی از روی‌هم‌نهی این ساختار که در ادامه به آن توری می‌گوییم می‌پردازیم. روشی که برای این کار استفاده می‌کنیم، استفاده از بردار وارون توری است[۲-۴]. ابتدا بردار وارون توری را از رابطه‌ی(۵) به‌دست می‌آوریم:

$$\vec{\mathbf{G}}=\nabla\phi=\frac{2\pi}{s}\vec{\rho}\mp\frac{2\pi}{\Lambda}\hat{y}=\frac{2\pi}{s}\left[\left(y\mp\frac{s}{\Lambda}\right)\hat{y}+z\,\hat{z}\right], \tag{۷}$$

برای توری که بردار وارون آن با این رابطه مشخص می‌شود، مرکز توری فرنل در $(y,z)=\left(\pm\frac{s}{\Lambda},0\right)$ قرار می‌گیرد. با پشت و رو کردن هریک از توری‌ها (به‌صورت راست و چپ کردن)، الگوی مربوط به هر علامت به شکل توری با علامت دیگر درخواهد آمد. در شکل۲ الگوی مربوط به این دو نوع توری رسم شده است.



شکل۲: نمایش دو الگوی توری مربوط به رابطه‌ی(۷) با علامت‌های منفی (راست) و مثبت (چپ).

از روی‌هم‌نهی دو الگوی توری، وقتی که هر دو مشابه هم باشند و یا با علامت‌های متفاوتی که در رابطه‌ی(۷) مشخص شده باشند، الگوهای ماره‌ی متفاوتی حاصل می‌شود. برای حالت اول فرض می‌کنیم دو توری مثل هم باشند (هر دو مثبت یا هر دو منفی). علاوه بر این، فرض می‌کنیم دو توری به‌صورت متقارن، زاویه‌ی کوچکی مثل θ نیز نسبت به هم داشته باشند. از رابطه‌ی(۷) داریم:

$$\vec{\mathbf{G}}=\frac{2\pi}{s}\left[\left(y\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+z\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\pm\frac{s}{\Lambda}\right)\left(\hat{y}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\hat{z}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right] \tag{۸}$$
$$+\frac{2\pi}{s}\left(\hat{z}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+\hat{y}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left(z\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+y\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right),$$

از رابطه فوق برای فرکانس الگوی ماره در حوالی مرکز توری که $(y,z)\cong(0,0)$ است، داریم:

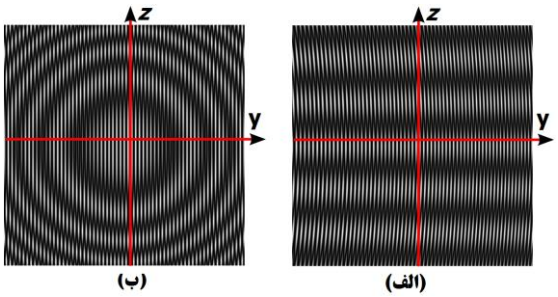
$$\vec{\mathbf{G}}_{moire}=\frac{2\pi}{\Lambda}\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\hat{z}. \tag{۹}$$

که خطوط موازی با گام $\Lambda_{moire}=\frac{\Lambda}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ و در راستای محور yها (عمود بر محور zها) است (شکل ۳-الف).

در ادامه به بررسی روی‌هم‌نهی دو توری مشابه که یکی نسبت به دیگری پشت و رو شده است (دو علامت متفاوت در رابطه‌ی(۷)) می‌پردازیم. از (۷) داریم:

$$\vec{\mathbf{G}}_{moire}=\vec{\mathbf{G}}^{(+)}-\vec{\mathbf{G}}^{(-)}=\frac{4\pi}{s}\vec{\rho}. \tag{۱۰}$$

این رابطه معادله‌ی بردار وارون الگوی فرنل است که مرکز آن منطبق بر مرکز توری است[۳]. در شکل۳ این دو روی‌هم‌نهی نمایش داده شده است.



شکل۳: الگوهای ماره‌ی روی‌هم‌نهی دو الگوی تداخلی رابطه‌ی۷ وقتی دو الگوی مشابه (الف) و یا پشت و رو شده (ب) روی‌هم می‌کنند.

۳- کارهای تجربی

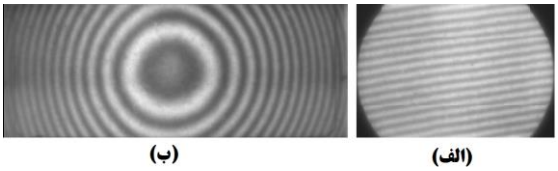
در آزمایشگاه با در اختیار داشتن دو الگوی توری که از طرح تداخلی دو جبهه‌ی موج به‌دست آمده‌اند و با استفاده از سه چیدمان مختلف، گام الگوهای توری را با

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

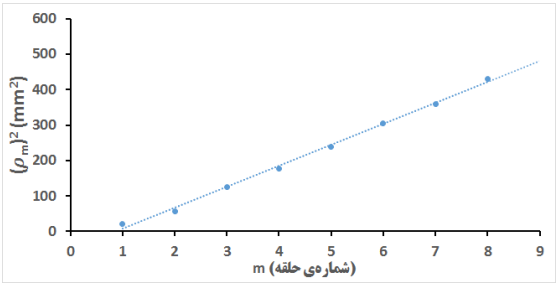
[Downloaded from opsi.ir on 2026-10-31]

روی‌هم‌نهی دو الگوی توری و ایجاد الگوهای ماره‌ی آن‌ها به‌دست می‌آوریم. در چیدمان اول با تغییر زاویه‌ی نسبی دوتوری و ایجاد الگوهای ماره‌ی خطی مختلف، از این الگوها توسط CCD عکس می‌گیریم(شکل ۴-الف). از رابطه‌ی(۹) و با تغییر زاویه‌ی نسبی دو توری و رسم نمودار گام الگوی ماره برحسب $\frac{1}{(2\sin\frac{\theta}{2})}$، گام توری‌ها را از روی شیب نمودار به‌دست می‌آوریم. مقدار به‌دست آمده برای گام توری $\Lambda = 0.093 \pm 0.004mm$ بود. در چیدمان دوم، با استفاده از چیدمان تالبوت و با استفاده از باریکه‌ی لیزر He-Ne، خودتصویر یکی از توری‌ها را روی توری دیگر می‌اندازیم. با دورکردن توری دوم از اولی و از روی محل بیشینه نمایانی الگوی ماره‌ی شکل گرفته بعد از توری دوم، فواصل نیم-تالبوت را از روی ریل مدرجی که توری بر آن سوار است قرائت می‌کنیم. از روی رابطه‌ی خودتصویر به‌صورت $z_n = \frac{n\Lambda^2}{\lambda}$ و رسم نمودار فواصل نیم‌تالبوت برحسب شماره‌ی آن، گام توری را محاسبه می‌کنیم که با این روش مقدار آن $\Lambda = 0.097 \pm 0.001mm$ به‌دست آمد. در نهایت با چیدمان پراش میدان دور از الگوی توری، گام توری از رابطه‌ی $\tan\theta = \frac{\lambda}{\Lambda} = \frac{X}{D}$ به‌دست می‌آید که در آن D فاصله‌ی نقطه‌ی مشاهده‌ی پراش تا توری و X فاصله‌ی پراش مرکزی از دو پراش کناری آن است که گام الگوی توری در چیدمان سوم برابر $\Lambda = 0.095 \pm 0.005mm$ اندازه‌گیری شد. در چیدمان‌های به‌کار رفته، روش تالبوت، کمترین میزان خطا را در اندازه‌گیری گام توری داشت.

با پشت و رو کردن یکی از توری‌ها، از روی‌هم‌نهی مستقیم آنها الگوی فرنل مشاهده گردید (شکل ۴-ب) که بیانگر واگرایی حداقل یکی از باریکه‌های به‌وجود آورنده‌ی توری‌ها بوده است. برای به‌دست آوردن این واگرایی لازم است تا ثابت الگوی فرنل، s، را به‌دست آوریم. این کار را با عکس‌برداری از الگوی ماره و اندازه‌گیری شعاع دوایر فرنل از رابطه‌ی $\rho_n^2 = ns$ [۲] و با رسم نمودار مجذور شعاع حلقه‌های فرنل ρ_n^2 برحسب شماره‌ی حلقه‌ها n، برابر $s = 59.17mm^2$ به‌دست آوردیم.



شکل۴: الگوهای تجربی روی‌هم‌نهی دو توری با الف: چرخش نسبی ۲/۵ درجه نسبت به‌هم، ب: با پشت و روکردن یکی از توری‌ها.



شکل۵: نمودار مجذور شعاع حلقه‌های فرنل، ρ_m^2، برحسب m.

در مرحله‌ی بعد با معلوم بودن ثابت الگوی فرنل و گام الگوی توری می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۶) مشخصات چیدمان اولیه را به‌دست آورد. با معلوم بودن طول‌موج لیزر حین ثبت توری ($\lambda = 632.8nm$)، زاویه‌ی نسبی دو باریکه و واگرایی آن به‌شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\theta = 6.82\times10^{-3}rad\,,\ R \cong x_1 = 187m.$$

۴- نتیجه‌گیری

پیش‌بینی نظری مبتنی بر بردار وارون برای محاسبه‌ی فاز جبهه‌ی موج کروی و الگوی ماره‌ی منتج از آن با آن‌چه که به‌طور تجربی در آزمایشگاه با دو هولوگرام ثبت شده انجام دادیم مطابقت دارد و می‌توان میزان واگرایی باریکه حین ثبت توری را از هولوگرام ثبت شده به‌دست آورد.

مراجع

[1] Hariharan, Parameswaran. *Optical interferometry*. Academic press, 2003.

[2] Rasouli, Saifollah, and Mohammad Yeganeh. "Formulation of the moiré patterns formed by superimposing of gratings consisting topological defects: moiré technique as a tool in singular optics detections." *Journal of Optics* 17, no. 10 (2015): 105604.

[3] Yeganeh, Mohammad, and Saifollah Rasouli. "Investigation of the moiré patterns of defected radial and circular gratings using the reciprocal vectors approach." *JOSA A* 33, no. 3 (2016): 416-425.

[4] Rasouli, Saifollah, and Mohammad Yeganeh. "Moiré patterns of curved line quasi-periodic structures." *JOSA A* 34, no. 10 (2017): 1746-1756.

[5] Isaac, Amidror, *The Theory of the Moiré Phenomenon*, Volume I:Periodic Layers, Second Edition, Sec. **6**, Springer, 2009

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from opsi.ir on 2026-10-31]