# بررسی حدهای بالا و پایین مقیاس درهم‌تنیدگی رنی

محبوبه مصلحی، حمیدرضا باغشاهی و سید یحیی میر افضلی
گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان، رفسنجان

چکیده - یکی از مقیاس‌های درهم‌تنیدگی، مقیاس تلاقی است، از آنجاکه محاسبه‌ی آن برای یک حالت آمیخته‌ی دلخواه مشکل است، یکسری حدهای بالا و پایین که به‌راحتی قابل محاسبه باشند، برای آن معرفی شده است. در این مقاله با استفاده از این حدها و همچنین با استفاده از ارتباط بین این مقیاس و مقیاس درهم‌تنیدگی دیگری، به نام مقیاس درهم‌تنیدگی رنی، حدهای بالا و پایینی برای درهم‌تنیدگی رنی معرفی می‌شود. سپس با درنظرگرفتن یک سامانه‌ی $2\times3$ بعدی، حدهای بالا و پایین این دو مقیاس و کارآیی این حدود مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلید واژه- درهم‌تنیدگی، مقیاس درهم‌تنیدگی تلاقی، مقیاس درهم‌تنیدگی رنی، حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی

# Investigation of Upper and Lower Bounds of Renyi entanglement Measure

Mahboobeh Moslehi, Hamid Reza Baghshahi and Sayyed Yahya Mirafzali

Department of Physics, Faculty of Science, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan

Abstract– One of the entanglement measure is the concurrence entanglement measure since it is difficult to calculate for an arbitrary mixed state, a series of upper and lower bounds that are easily computable are introduced for it. In this paper using these bounds and also the relation between this measure and the other entanglement measure, called the Renyi entanglement measure, the upper and lower bounds for Renyi entanglement measure are introduced. Then considering a $2\times3$ system, the upper and lower bounds of these two measures and the efficiency of these bounds are investigated.

Keywords: Entanglement, Concurrence entanglement measure, Renyi entanglement measure, Upper and lower bounds of entanglement

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06 ]



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

۱- مقدمه

درهم‌تنیدگی کوانتومی یکی از غیرکلاسیکی‌ترین پدیده‌های فیزیک کوانتومی است. حالت آمیخته را درهم‌تنیده گویند اگر نتوان آن را بصورت جمع محدبی از حالت‌های ضربی نوشت، در غیر اینصورت حالت را جداپذیر گویند. از آنجا که با این تعریف به سختی می‌توان جداپذیری یک حالت را بررسی کرد، یافتن معیاری برای تشخیص جداپذیری حالت‌های کوانتومی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای بعضی اهداف لازم است که مقدار درهم‌تنیدگی یک حالت را بدانیم و از آنجا که معیارهای جداپذیری تنها درهم‌تنیده بودن یا نبودن یک حالت کوانتومی را تعیین می‌کنند، یافتن مقیاسی برای تعیین میزان درهم‌تنیدگی یک سامانه‌ی مرکب بسیار مهم است. مقیاس درهم‌تنیدگی رنی یکی از این مقیاس‌هاست که بر اساس آنتروپی رنی تعریف می‌شود. برای یک حالت خالص دو جزئی، ارتباط بین درهم‌تنیدگی و آنتروپی رنی بصورت زیر است [۱]:

$$E_\alpha(|\psi_{AB}\rangle) = S_\alpha(\rho_B), \qquad (۱)$$

$$S_\alpha(\rho_B) = \frac{1}{1-\alpha}\log_2(tr\rho_B^\alpha), \qquad (۲)$$

که در آن $\alpha \neq 1$ و $\alpha > 0$، و $\rho_B$ ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی زیر سامانه‌ی $B$ است. وقتی که $\alpha$ به سمت یک میل می‌کند، آنتروپی رنی به آنتروپی فون نویمن همگرا می‌شود.

برای یک حالت آمیخته‌ی دو جزئی، رابطه‌ی (۱) بصورت زیر بسط داده می‌شود:

$$E_\alpha(\rho_{AB}) = \min\sum_i p_i E_\alpha(|\psi_i\rangle_{AB}) \qquad (3)$$

که در آن کمینه روی تمامی بسط‌های ممکن $\rho_{AB}$ بر حسب حالت‌های خالص بصورت $\rho_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle_{AB}\langle\psi_i|$ گرفته می‌شود. برای حالت‌های آمیخته‌ی دلخواه کمینه‌سازی رابطه‌ی (۳) کار چندان ساده‌ای نیست.

یکی از مقیاس‌های پرکاربرد درهم‌تنیدگی، مقیاس تلاقی است که برای یک حالت خالص دو جزئی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(|\psi_{AB}\rangle) = \sqrt{2(1-tr\rho_B^2)} \qquad (4)$$

که $\rho_B$ ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی زیر سامانه‌ی $B$ است. برای یک حالت آمیخته‌ی دو جزئی نیز به مانند مقیاس درهم‌تنیدگی رنی، تعریف مقیاس تلاقی بصورت زیر بسط داده می‌شود:

$$C(\rho_{AB}) = \min\sum_i p_i C(|\psi_{AB}\rangle) \qquad (5)$$

که در آن کمینه به مانند رابطه‌ی (۳) تعریف می‌شود. کمینه‌ی مورد نظر در رابطه‌ی (۳) در محدوده‌ی $\alpha \in [0.82,1.3]$، برای حالت‌های آمیخته‌ی $2\times d$ بعدی به رابطه‌ی زیر بین مجذور مقیاس تلاقی و درهم‌تنیدگی رنی منجر می‌شود [2,3]:

(6)

$$E_\alpha(\rho_{AB}) = F_\alpha(c^2(\rho_{AB})),$$
$$F_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha}\log_2[(\frac{1-\sqrt{1-x}}{2})^\alpha + (\frac{1+\sqrt{1-x}}{2})^\alpha]$$

برای حالت حالت‌های آمیخته $2\times 2$ بعدی محاسبه‌ی مقیاس تلاقی $(c^2(\rho_{AB}))$ به صورت تحلیلی کار ساده‌ای است، ولی برای حالت‌های با ابعاد بالاتر محاسبه آن به طور تحلیلی امکان‌پذیر نیست. از این رو، برای در دست داشتن تقریبی از میزان درهم‌تنیدگی برای حالت‌های با ابعاد بالاتر، حدهای بالا و پایین گوناگونی برای مقیاس تلاقی در مراجع [۵,4] به صورت زیر معرفی شده است:

$$2\left(tr\rho_{AB}^2 - tr\rho_B{}^2\right) \le c^2(\rho_{AB}) \le 2\left(1-tr\rho_B{}^2\right) \qquad (7)$$

که می‌توان آنها را بصورت چشمداشتی مشاهده‌پذیرهای فیزیکی به صورت زیر نمایش داد:

$$2\left(tr\rho_{AB}^2 - tr\rho_B{}^2\right) = tr\left(\rho_{AB}\otimes\rho_{AB}v\right),$$
$$2\left(1-tr\rho_B{}^2\right) = tr\left(\rho_{AB}\otimes\rho_{AB}k\right),$$
$$v = 4p_-{}^{(1)}\otimes\left(p_-{}^{(2)} - p_+{}^{(2)}\right),$$
$$k = 4\left(I^{(1)}\otimes p_-{}^{(2)}\right), \qquad (8)$$

و از اینرو دارای این مزیت هستند که می‌توان آنها را بطور مستقیم اندازه‌گیری کرد.



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06 ]

در این مقاله یک حد بالا و پایین برای درهم‌تنیدگی رنی، با استفاده از ارتباط آن با مقیاس تلاقی (رابطه (6))، برای حالت‌های آمیخته $2\times d$ معرفی می‌کنیم. سپس با محاسبه حدهای بالا و پایین مقیاس تلاقی و درهم‌تنیدگی رنی برای یک سامانه $2\times 3$ بعدی، میزان کارآیی حدهای بالا و پایین معرفی‌شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۲- معرفی حدهای بالا و پایین مقیاس درهم‌تنیدگی رنی

با توجه به خاصیت یکنوا صعودی بودن $F_\alpha(x)$ در بازه ذکر شده برای $\alpha$ (رابطه (6))، می‌توان از رابطه (7) به نامساوی زیر دست یافت [۳]:

$$F_\alpha\left(2(tr\rho_{AB}^2-tr\rho_B{}^2)\right)\le F_\alpha\left(c^2(\rho_{AB})\right)\le F_\alpha\left(2(1-tr\rho_B{}^2)\right) \quad (9)$$

اکنون چون تساوی $F_\alpha\left(c^2(\rho_{AB})\right)=E_\alpha(\rho_{AB})$ برقرار است لذا $F_\alpha\left(2(tr\rho_{AB}^2-tr\rho_B{}^2)\right)$ و $F_\alpha\left(2(1-tr\rho_B{}^2)\right)$ به ترتیب حدهای بالا و پایین درهم‌تنیدگی رنی خواهند بود. حال با درنظرگرفتن یک سامانه‌ی $2\times 3$ به بررسی این نکته می‌پردازیم که آیا اختلاف حدهای بالا و پایین مقیاس درهم‌تنیدگی رنی از اختلاف حدهای بالا و پایین متناظرشان برای مقیاس تلاقی کمتر است یا بیشتر؟

## ۳- مثال

در این مثال یک سامانه دو جزئی، شامل یک زیر سامانه‌ی دو ترازی (A) با ترازهای $|1\rangle$ و $|0\rangle$ و یک زیر سامانه‌ی سه ترازی (B) با ترازهای $|0\rangle$، $|1\rangle$ و $|2\rangle$ با حالت اولیه‌ای به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\psi_{AB}(0)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle+\frac{1}{2}(|11\rangle+|12\rangle) \quad (10)$$

تحول زمانی این سامانه با معادله اصلی مارکوفی به صورت $\dot\rho=L\rho$ داده می‌شود که در آن عملگر لیندبلاند $L$ شامل دو جمله متناظر با برهم‌کنش‌های موضعی برای دو اتم به طور جداگانه و به صورت زیر است:

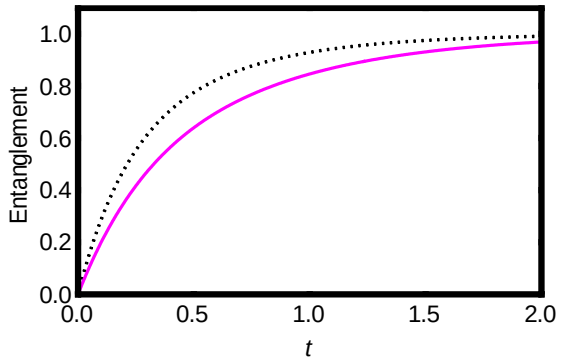
$$L_i=\frac{\Gamma}{2}\left(2\sigma_i\rho\sigma_i^\dagger-\rho\sigma_i^\dagger\sigma_i-\sigma_i^\dagger\sigma_i\rho\right),\ i=A,B \quad (11)$$

با انتخاب $\sigma_A$ و $\sigma_B$ به صورت زیر، تحول زمانی بالا نشان‌دهنده‌ی واهمدوسی دو اتم به صورت جداگانه است:

$$\sigma_A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\sigma_B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \quad (12)$$

اکنون با استفاده از رابطه‌های (7) و (9) حدهای بالا و پایین مقیاس تلاقی و درهم‌تنیدگی رنی را برای $\rho_{AB}(t)$ به صورت تابعی از زمان محاسبه و به ازای $\alpha$های مختلف نمودارهای آن‌ها را در شکل‌های زیر رسم می‌نماییم.

در شکل‌های (۱) و (۲) اختلاف بین حدهای بالا و پایین مقیاس تلاقی و درهم‌تنیدگی رنی به صورت تابعی از زمان، به ترتیب برای $\alpha=0.82$ و $\alpha=1.2$ بر حسب زمان مشخصه‌ی $\Gamma t$ رسم شده است. در این شکل‌ها با توجه به اینکه مقیاس تلاقی برای سامانه مورد بررسی، هیچ‌گاه بزرگتر از یک و کوچکتر از صفر نیست، بنابراین در زمان‌هایی که حدهای بالا و پایین آن بزرگتر از یک و کوچکتر از صفر شده‌اند، مقدار آن‌ها را به ترتیب برابر با یک و صفر قرار داده‌ایم.

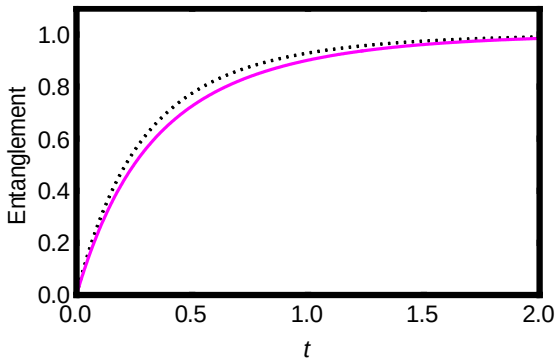



شکل 1: اختلاف حدهای بالا و پایین مقیاس تلاقی (نمودار خط چین) و درهم‌تنیدگی رنی (نمودار توپر) به ازای $\alpha=0.82$.



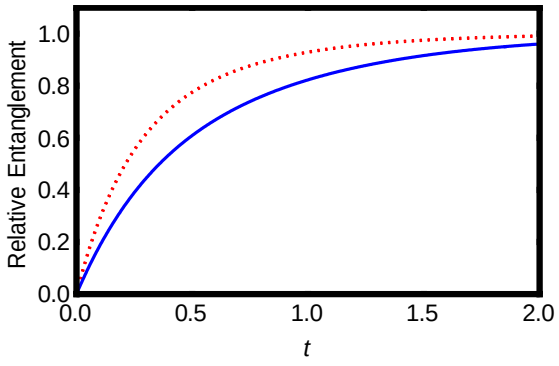
این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06 ]

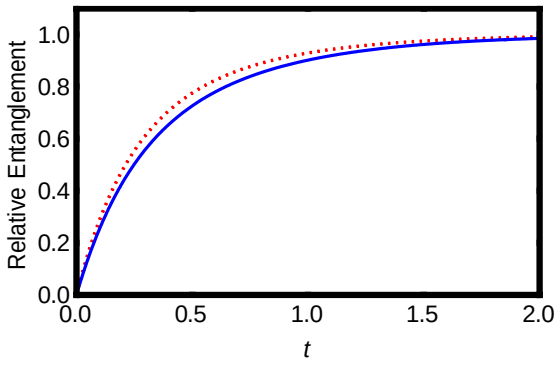



شکل ۲: اختلاف حدهای بالا و پایین مقیاس تلاقی (نمودار خط‌چین) و درهم‌تنیدگی رنی (نمودار توپر) به ازای $\alpha=1.2$.

باتوجه به شکل‌های (۱) و (۲) به ازای $\alpha=0.82$ و $\alpha=1.2$ اختلاف حدهای بالا و پایین مقیاس درهم‌تنیدگی رنی همواره کوچکتر از اختلاف بین حدهای بالا و پایین مقیاس تلاقی است. بنابراین حد بالا و پایین مقیاس درهم-تنیدگی رنی نسبت به حد بالا و پایین مقیاس تلاقی، به مقدار واقعی مقیاس‌شان نزدیک‌ترند.




شکل ۳: اختلاف نسبی حدهای بالا و پایین مقیاس تلاقی (نمودار خط-چین) و درهم‌تنیدگی رنی (نمودار توپر) به ازای $\alpha=0.82$.




شکل ۴: اختلاف نسبی حدهای بالا و پایین مقیاس تلاقی (نمودار خط-چین) و درهم‌تنیدگی رنی (نمودار توپر) به ازای $\alpha=1.2$.

در شکل‌های (۳) و (۴) اختلاف نسبی بین حدهای بالا و پایین (تفاضل حد بالا و پایین تقسیم بر حد بالا) مقیاس-های تلاقی و درهم‌تنیدگی رنی به صورت تابعی از زمان، به ترتیب برای $\alpha=0.82$ و $\alpha=1.2$ بر حسب زمان مشخصه‌ی $\Gamma_t$ رسم شده است. با استفاده از این نمودارها می‌توان تشخیص داد که کارآیی حدهای بالا و پایین برای کدام مقیاس درهم‌تنیدگی مورد بررسی بهتر است. چنانچه که به شکل‌های (۳) و (۴) توجه کنیم خواهیم دید که اختلاف نسبی رسم شده برای مقیاس درهم‌تنیدگی رنی کوچکتر از اختلاف نسبی رسم شده برای مقیاس تلاقی است، در نتیجه کارآیی این حدود برای مقیاس درهم-تنیدگی رنی بهتر است. همچنین بررسی‌ها نشان داد که نمودار اختلاف نسبی برای $\alpha$های کوچکتر نسبت به $\alpha$های بزرگتر پایین‌تر قرار می‌گیرد و این یعنی اینکه کارآیی حدهای بالا و پایین مقیاس درهم‌تنیدگی رنی برای $\alpha$های کوچکتر بهتر است.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک حد بالا و پایین برای درهم‌تنیدگی رنی (بر اساس حد بالا و پایین مقیاس تلاقی و ارتباط آن با درهم‌تنیدگی رنی) معرفی شد. سپس در یک مثال نوعی، کارآیی این حدها در تعیین مقدار دقیق درهم‌تنیدگی رنی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که در مثال ذکر شده برای بازه‌ی $0.82\le\alpha\le1.3$ کارآیی این حدها در مقایسه با حد بالا و پایین تلاقی بهتر است.

## ۵-مراجع

[1] R. Horodecki, P. Horodecki and M. Horodecki, ;*Phys, Lett. A* 210(1996)377 .

[2] J. S. Kim and B. C. Sanders, Phys. A:Math. Theor 43(2010)445305 .

[3] W. Song, Y. K. Bai, M. Yang, M. Yang, and Z. L. Cao 93(2016)022306 .

[4] F. Mintert and A. Buchleinter, *Phys. Rev. Lett* 98(2007)140505

[5] C. J. Zhang, Y. X. Gong, Y. S. Zhang and G. S. Guo, *Phys. Rev. A*78(2008)042308 .



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06 ]