# تولید حالت‌های درهم‌تنیده در یک چگالیده بوز- اینشتین دومدی با در نظر گرفتن برخوردهای میان‌اتمی

**ابراهیم، قاسمیان- محمد کاظم، توسلی**

یزد- صفائیه- دانشگاه یزد- دانشکده فیزیک- گروه اتمی ملکولی

**چکیده – در این مقاله رده‌های جدیدی از حالت‌های درهم‌تنیده متناظر با یک چگالیده بوز- اینشتین دومدی را با لحاظ کردن برخوردهای کشسان دو و سه‌جسمی و هم‌چنین، برخوردهای تبادلی بین مدی تولید می‌کنیم. پس از معرفی ساختار کلی حالت وابسته به زمان سامانه، حالت‌های درهم‌تنیده مختلفی تولید می‌شوند. با توجه به قدرت تونل‌زنی اتم‌ها، حالت‌های در هم‌تنیده به صورت دو، سه و چهارجزئی تولید می‌شوند. نشان خواهیم داد که برخوردهای سه‌جسمی اثر چشم‌گیری بر تولید حالت‌های درهم‌تنیده دارد. با وجود این در برخی شرایط ویژه، حالت به دست آمده درهم‌تنیده نیست. درجه درهم‌تنیدگی برای حالت‌های درهم‌تنیده دوجزئی را می‌توان با کنترل تعداد اتم‌ها در چگالیده تنظیم کرد، به طوری‌که با افزایش تعداد اتم‌های موجود در سامانه دومدی، پارامتر تلاقی مربوط به این حالت‌ها به مقدار بیشینه خود نزدیک می‌شود.**

کلید واژه- برخوردهای میان‌اتمی، حالت درهم‌تنیده، جفت‌شدگی تونلی، چگالیده بوز- اینشتین دومدی .

# The generation of entangled states in a two-mode Bose-Einstein condensate under the influence of interatom collisions

Ebrahim, Ghasemian; Mohammad Kazem, Tavassoly
Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University

Abstract- In this paper we generate some new classes of entangled states of a two-mode Bose-Einstein condensate (BEC) in the presence of two- and three-body elastic as well as mode-exchange collisions. After introducing the general form of the time evolved state, various classes of entangled states are generated. Depending on the tunneling strength constants, two-, three- and four-partite entangled states are generated. Considering three-particle collision dramatically changes the generated entangled states. Moreover, in particular cases, the resulted states are non-entangled. The degree of entanglement for two-partite entangled states can be tuned via the number of BEC atoms i.e., the corresponding concurrence tends to its maximum value by increasing the number of atoms in the system.

Keywords: Two-mode Bose-Einstein condensate, entangled state, interatom collisions, tunnel-coupled.

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-04 ]



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

**مقدمه:** امروزه درهم‌تنیدگی به عنوان یک منبع فیزیکی پایه در قلب مطالعات مربوط به پردازش اطلاعات کوانتومی و مخابرات کوانتومی قرار دارد. این پدیده یک ابزار اساسی در نظریه اندازه‌گیری کوانتومی محسوب می‌شود، به طوری‌که وقتی دو سامانه با یک حالت درهم‌تنیده معرفی می‌شود هر سامانه به عنوان یک ابزار اندازه‌گیری برای سامانه دیگر محسوب می‌شود [۱]. به منظور دست‌یابی به شناخت جنبه‌های جدیدی از سامانه‌های چندجسمی، حالت‌های درهم‌تنیده در سامانه‌های چگالیده به طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۳-۲]. هدف از انجام این پژوهش بررسی اثر برخوردهای میان‌اتمی در یک سامانه متشکل از دو چگالیده بوز-اینشتین است که از طریق جفت‌شدگی تونلی با یکدیگر برهم-کنش می‌کنند.

**هامیلتونی سامانه**: یک سامانه متشکل از یک چگالیده بوز-اینشتین اتمی دومدی را در نظر می‌گیریم. با توجه به وجود تعداد زیادی از اتم‌ها در چنین سامانه‌هایی، برخوردهای میان‌اتمی دارای اهمیت زیادی است به گونه-ای که ویژگی‌های فیزیکی آنها را تحت تاثیر خود قرار می‌دهند. هامیلتونی سامانه مورد نظر به صورت زیر است [۴]:

$$H = A_1(a^+a - b^+b) + A_2(a^+a - b^+b)^2 + A_3(a^+a - b^+b)^3 \quad (۱)$$

که $a$ ($a^+$) و $b$ ($b^+$) عملگرهای آفرینش (نابودی) مربوط به هر یک از مدهای سامانه هستند. هم‌چنین، $A_i$ ($i=1,2,3$) ضریب جفت‌شدگی تونلی مرتبه $i$ام در سامانه را معرفی می‌کند که در واقع بیانگر برخوردهای میان‌اتمی تا مرتبه سوم هستند. هامیلتونی توصیف کننده جزئیات دقیق برخوردهای میان‌اتمی در این سامانه بسیار پیچیده است، اما خوشبختانه با استفاده از یک عملگر انتقال دومدی به شکل ساده شده بالا معرفی می‌شود [۵]. هامیلتونی (۱) در فضای فوک دومدی قطری است، بنابراین داریم:

$$|n,m\rangle = \frac{a^{+n}b^{+m}}{\sqrt{n!m!}}|0,0\rangle, \quad (۲)$$

و طیف انرژی آن با رابطه زیر داده می‌شود:

$$E = A_1(n-m) + A_2(n-m)^2 + A_3(n-m)^3 \quad (۳)$$

که $n$ و $m$ دو عدد صحیح نامنفی هستند.

**درهم‌تنیدگی دومدی:** به منظور تولید حالت‌های اتمی درهم‌تنیده گوناگون حالت اولیه سامانه در $t=0$ را به صورت حاصل‌ضرب دو حالت همدوس ($|\varphi(0)\rangle = |\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$) در نظر می‌گیریم. بنابراین حالت سامانه در زمان $t$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-(|\alpha|^2+|\beta|^2)} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} e^{-it\Theta(n,m)} \frac{a^{+n}b^{+m}}{\sqrt{n!m!}}|n,m\rangle, \quad (۴)$$

که در آن:

$$\Theta(n,m) = A_1(n-m) + A_2(n-m)^2 + A_3(n-m)^3.$$

رابطه (۴) یک حالت همدوس تعمیم یافته را معرفی می-کند که از حالت همدوس گلابر معمولی، به دلیل وجود عامل فازی $\Theta(n,m)$، متمایز است. هم‌چنین، این رابطه دارای دوره تناوب $2\pi$ است. این رفتار تناوبی یک مشخصه اساسی برای این سامانه محسوب می‌شود و ویژگی‌های آن را به طور قابل توجهی تحت تاثیر خود قرار می‌دهد. فرض می‌کنیم که زمان، مقادیر $t = \frac{M}{N}2\pi$ را اختیار کندکه M و N دو عدد صحیح و نسبت به هم اول باشند. بنابراین داریم:

$$e^{-it\Theta(n,m)} = e^{-it\Theta(n+N,m+N)}, \quad (۵)$$

که نشان می‌دهد تابع نمایی نسبت به $m$ و $n$ با دوره تناوب مشابه N متناوب است. بنابراین بردار حالت سامانه را می‌توان به صورت یک برهم‌نهی گسسته از حاصل‌ضرب دو حالت همدوس به صورت زیر نوشت:



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-04 ]

$$\left|\varphi(t=\frac{M}{N}2\pi)\right\rangle=\sum_{r,s=1}^{N}c_{rs}\left|\alpha e^{i\phi_r},\beta e^{\phi_s}\right\rangle, \quad (۶)$$
$$\phi_r=\frac{2\pi}{N}r,\quad \phi_s=\frac{2\pi}{N}s.$$

پس از کمی محاسبات، با استفاده از روابط (۴) و (۶) می‌توان ضرایب $c_{rs}$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$c_{rs}=\frac{1}{N^2}\sum_{n=m=1}^{N}e^{-\frac{2\pi i}{N}(nr+ms-M\Theta(n,m))}. \quad (۷)$$

**درجه درهم‌تنیدگی (پارامتر تلاقی):** به منظور محاسبه میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های دوجزئی، یک حالت کلی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\psi=\frac{1}{Mn}(\mu|\eta\rangle\otimes|\gamma\rangle+\nu|\zeta\rangle\otimes|\delta\rangle), \quad (۸)$$

که $|\eta\rangle$ و $|\zeta\rangle$ $\left(|\gamma\rangle,|\delta\rangle\right)$ حالت‌های تک‌مدی مستقل خطی مربوط به زیرسامانه اول (دوم) سامانه کل هستند و ضریب بهنجارش $M_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Mn=|\mu|^2+|\nu|^2+2\,\mathrm{Re}(\mu^*\nu p_1 p_2{}^*),$$
$$p_1=\langle\eta\,|\,\zeta\rangle,\quad p_2=\langle\delta\,|\,\gamma\rangle. \quad (۹)$$

پارامتر تلاقی برای چنین حالت‌هایی نیز از رابطه زیر به دست می‌آید [۶]:

$$C=\frac{2|\mu||\nu|}{Mn^2}\sqrt{(1-|p_1|)^2(1-|p_2|)^2}. \quad (۱۰)$$

**تولید حالت‌های درهم‌تنیده:** رابطه (۶) به وضوح بیانگر این است که می‌توان حالت‌های درهم‌تنیده مختلفی را برای یک سامانه دومدی تولید کرد که مولفه‌های آن از حاصل‌ضرب دو حالت همدوس تشکیل می‌شوند. اکنون با استفاده از این رابطه و در نظر گرفتن برخوردهای میان‌اتمی مختلف رده‌های گوناگونی از حالت‌های درهم‌تنیده را تولید می‌کنیم.

الف) اگر برخوردهای میان‌اتمی تا مرتبه دوم در نظر گرفته شود ($A_3=0$): فرض می‌کنیم که ضرایب تونل‌زنی مرتبه اول و دوم به ترتیب $A_1=100$ و $A_2=1$ باشند. به ازای مقادیر $N=4$ و $M=1$، ضرایب $c_{rs}$ غیرصفر به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$c_{2,2}=\frac{1}{2}(1-i),\quad c_{2,4}=\frac{1}{2}(1+i), \quad (۱۱)$$

و حالت درهم‌تنیده به دست آمده در این شرایط به صورت زیر است:

$$\left|\varphi(t=\frac{\pi}{2})\right\rangle=\frac{1}{2}[(1+i)|-\alpha,\beta\rangle + (1-i)|-\alpha,-\beta\rangle]. \quad (۱۲)$$

این یک حالت درهم‌تنیده دوجزئی است که پارامتر تلاقی مربوط به آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C=\frac{\sqrt{(1-e^{-4|\alpha|^2})(1-e^{-4|\beta|^2})}}{1+e^{-2(|\alpha|^2+|\beta|^2)}}. \quad (۱۳)$$

از این رابطه به وضوح می توان دریافت که با افزایش تعداد اتم‌های اولیه در سامانه، پارامتر تلاقی به مقدار بیشینه خود ($C=1$) میل می‌کند. اگر حالتی را در نظر بگیریم که تمامی شرایط آن مثل مورد قبل باشد و تنها ضریب تونل‌زنی مرتبه دوم را $A_2=10$ در نظر بگیریم، حالت به دست آمده کاملاً جداپذیر است:

$$\left|\varphi(t=\frac{\pi}{2})\right\rangle=|-\alpha,-\beta\rangle. \quad (۱۴)$$

بنابراین، به وضوح دیده می‌شود که نوع برخوردهای میان‌اتمی و میزان جفت‌شدگی بین اتم‌ها در تولید حالت‌های درهم‌تنیده بسیار حائز اهمیت هستند. اکنون موردی را نظر می‌گیریم که در آن $N=3$ و $m=1$ و ضرایب تونلی‌زنی $A_1=100$ و $A_2=1$ هستند. حالت درهم‌تنیده متناظری به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\left|\varphi(t=\frac{2\pi}{3})\right\rangle=\frac{i\sqrt{3}}{3}\left|\alpha^{'},\beta^{'}\right\rangle + \frac{1}{2}\left(1-\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)[|\alpha,\beta\rangle+\left|\alpha^{''},\beta^{''}\right\rangle], \quad (۱۵)$$

که در آن:

$$\alpha^{'}=\alpha e^{\frac{2\pi i}{3}},\quad \beta^{'}=\beta e^{\frac{4\pi i}{3}},$$
$$\alpha^{''}=\alpha e^{\frac{4\pi i}{3}},\quad \beta^{''}=\beta e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

حالت بالا در واقع یک حالت درهم‌تنیده سه‌جزئی است.



این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-04 ]

ب) اگر برخوردهای میان‌اتمی تا مرتبه سوم در نظر گرفته شوند: برای تولید حالت‌ها درهم‌تنیده در حضور تمامی فرآیندهای برخوردی تا مرتبه سوم و هم‌چنین به منظور تسهیل مقایسه آنها در غیاب برخوردهای مرتبه سوم، شرایط را مانند قبل در نظر می‌گیریم. به ازای مقادیر $N=4$ و $M=1$ و با در نظر گرفتن ضرایب تونل‌زنی مرتبه اول تا سوم به ترتیب $A_1=100$ و $A_2=1$ و $A_3=1$، حالت درهم‌تنیده ایجاد شده به صورت زیر است:

$$\left|\varphi(t=\frac{\pi}{2})\right\rangle=\frac{1}{2}[\left|\alpha,\beta\right\rangle+\left|-\alpha,-\beta\right\rangle] + \frac{i}{2}[\left|i\alpha,-i\beta\right\rangle+\left|-i\alpha,i\beta\right\rangle], \quad (۱۶)$$

که یک حالت درهم‌تنیده چهارجزئی محسوب می‌شود. از مقایسه روابط (۱۲) و (۱۶) می‌توان دریافت که اثر برخوردهای سه‌جسمی بر تولید حالت‌های درهم‌تنیده بسیار قابل توجه است. در غیاب برخوردهای سه‌جسمی حالت درهم‌تنیده به دست آمده یک حالت دوجزئی است (۱۳) ولی در حضور برخوردهای سه‌جسمی حالت به دست آمده چهارجزئی (۱۷) است.

اکنون حالت درهم‌تنیده را به ازای $N=3$ و $M=1$ و با در نظر گرفتن تمامی فرآیندهای برخوردی با ضرایب $A_1=100$ و $A_2=1$ و $A_3=1$ به دست می‌آوریم که به یک حالت درهم‌تنیده سه‌جزئی منتهی می‌شود:

$$\left|\varphi(t=\frac{2\pi}{3})\right\rangle=\frac{i\sqrt{3}}{3}\left|\alpha',\beta'\right\rangle + \frac{1}{2}\left(1-\frac{i\sqrt{3}}{3}\right)[\left|\alpha,\beta\right\rangle+\left|\alpha'',\beta''\right\rangle], \quad (۱۷)$$

که در آن:

$$\alpha'=\alpha e^{\frac{4\pi i}{3}},\quad \beta'=\beta e^{\frac{2\pi i}{3}},$$
$$\alpha''=\alpha e^{\frac{2\pi i}{3}},\quad \beta''=\beta e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

در اینجا باید به این نکته اشاره کرد که در محدوده مجاز (محدوده پایداری) استفاده از تقریب دومدی هیچگونه محدودیتی روی تعداد اتم‌های موجود در سامانه برای تولید حالت‌های درهم‌تنیده وجود ندارد [۷]. تولید حالت‌های درهم‌تنیده دو، سه و چهارجزئی در سامانه‌های شامل تعداد زیادی از ذرات دارای اهمیت ویژه‌ای است که در فرآیندهای محاسبات کوانتومی پایه و مخابرات کوانتومی از آنها استفاده می‌شود.

**نتیجه‌گیری:** در این مقاله دسته‌هایی از حالت‌های درهم‌تنیده اتمی در حضور تمامی برخوردهای میان‌اتمی در یک سامانه شامل یک چگالیده دومدی با استفاده از مدل بوز-هابارد دومدی تولید شدند. حالت‌های تولید شده دو، سه و چهارجزئی هستند که نسبت به تغییر اندازه ضریب تونل‌زنی بسیار حساس هستند ولی در عین حال، در برخی شرایط خاص، حالت به وجود آمده درهم‌تنیده نیست. محاسبه میزان درهم‌تنیدگی بر مبنای پارامتر تلاقی نشان داد که هر چه تعداد اتم‌های موجود در سامانه بیشتر باشد میزان درهم‌تنیدگی بین حالت‌های دوجزئی در سامانه مورد نظر بیشتر است و در نهایت به مقدار بیشینه خود میل می‌کند. دسته‌های جالب توجه دیگری از حالت‌های درهم‌تنیده را نیز می‌توان با استفاده از تغییر پارامترهای موجود در این مدل تولید کرد که در این مقاله به علت محدودیت جا ارائه نشده است.

## مراجع


[1] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin and W. K. Wootters, Phys. Rev. A **54** 3824 (1996).
[2] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys **73** 565 (2001).
[3] E. Ghasemian and M. K. Tavassoly, Phys. Lett. A **380** 3262 (2016).
[4] C. Sabin, P. Barberis-Blostein, C. Hernandez, R. B. Mann and I. Fuentes, J. Math. Phys. **56** 112102 (2015).
[5] L. M. Kuang and L. Zhou , Phys. Rev. A **68** 043606 (2003).
[6] A. Mann, B. C. Sanders and W.J. Munro, Phys. Rev. A **51** 989 (1995).
[7] L. Sanz, M. H. Y. Moussa, K. Furuya, Annals of Physics **321** 1206 (2006).




این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[ Downloaded from opsi.ir on 2026-11-04 ]