ایجاد درهم‌تنیدگی بین اسپین و مکان دو ذره در فرایند پراکندگی

مرتضی رفیعی[۱]، مرتضی سلطانی[۲]

[۱]شاهرود، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده فیزیک

[۲]اصفهان، دانشگاه اصفهان، دانشکده علوم، گروه فیزیک

چکیده – در این مقاله به مطالعه و بررسی پراکندگی یک ذره اسپین $\frac{1}{2}$ از یک ذره هدف جایگزیده مشابه پرداخته‌ایم. هامیلتونی برهم-کنشی حاکم بر سامانه شامل برهم‌کنش هایزنبرگ اسپینی بین دو اسپین و میدان مغناطیسی موضعی با اسپین ذره هدف است. ناشی از حضور این میدان مغناطیسی، برای هر کدام از امواج بازتابی یا عبوری دو موج با بردارهای موج متفاوت حاصل می‌شود. بنابراین بر طبق نتایج به‌دست آمده، به‌ازای مقادیر کوچک میدان مغناطیسی می‌توان بین اسپین ذره هدف و تکانه موج فرودی درهم‌تنیدگی ایجاد نمود. در ادامه نشان داده‌ایم که با درنظر گرفتن موج فرودی به‌صورت یک بسته موج گاوسی می‌توان این درهم‌تنیدگی را به مکان ذره نیز مرتبط دانست و از آن می‌توان به ازای مقادیر کوچک پهن‌شدگی بسته موج، برای تعیین مکان ذره استفاده نمود.

کلید واژه- پراکندگی، درهم‌تنیدگی، بسته موج گاوسی.

Entanglement Generation between Spin and Location of Two Particles via Scattering Processes

Morteza Rafiee[1], Morteza Soltani[2]

[1]Faculty of Physics, Shahrood University of Technology, 3619995161 Sharood, Iran

[2]Department of Physics, Faculty of Sciences, University of Isfahan, 81746-73441 Isfahan, Iran

Abstract- In this paper we try to study the scattering of the one spin half particle from localized spin particle. Interaction Hamiltonian governed this system contains a Heisenberg spin interaction with localized magnetic field on the second particle. We have two different wave vectors in both transmitted and reflected waves via this localized magnetic field. So, according to our results we have an amount of entanglement between the spin of localized spin with the momentum of the incident particle for some small amounts of magnetic field. In the following, we consider the incident particle as a Gaussian wave packet and show that we can related this entanglement to the location of the particle and it could be used as an indicator of the location of the particle in the low wave width regime.

Keywords: Scattering, Entanglement, Gaussian wave packet.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

۱- مقدمه

درهم‌تنیدگی یکی از ویژگی‌های خاص نظریه مکانیک کوانتومی است که نقش اساسی و کلیدی در نظریه اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی ایفاء می‌کند [۱]. ایجاد درهم‌تنیدگی بین دو سامانه کوانتومی به منظور به‌دست آوردن حالت‌های درهم‌تنیده در پروتکل‌های ارتباطات کوانتومی، فرابرد کوانتومی و محاسبات کوانتومی ضروری است [۲]. برای این منظور نیاز به ایجاد یک برهم‌کنش بین سامانه‌های کوانتومی داریم و بنابراین از میان راه‌های مختلف ایجاد این برهم‌کنش می‌توان به فرایندهای پراکندگی بین دو یا چند کیوبیت توجه نمود [۳و ۴]. فرایندهای پراکندگی در مقیاس کوانتومی یکی از راه‌های ساده و مورد توجه بین کیوبیت‌های حامل اطلاعات کوانتومی است. در ابتدای کانال کوانتومی و برای یک فرایند پراکندگی، وقتی ذرات در فاصله بسیار دور از یکدیگر هستند، حالت کل سامانه یک حالت خالص ضربی غیرهمبسته است. در نتیجه برخورد بین ذره فرودی با ذره یا ذرات هدف، اطلاعات کوانتومی بین آن‌ها تبادل می‌گردد و در نتیجه این فرایند امکان ایجاد حالت‌های همبسته وجود دارد [۵-۷]. در این مقاله به بررسی و ایجاد درهم‌تنیدگی در یک فرایند پراکندگی بین یک ذره فرودی و یک ذره هدف می‌پردازیم. برهم‌کنش اسپینی بین دو ذره از نوع هایزنبرگ است و یک میدان مغناطیسی موضعی با اسپین ذره هدف برهم‌کنش می‌کند. در این مقاله نشان داده‌ایم که اگر حالت ورودی، ویژه‌حالت تکانه باشد، آنگاه بین تکانه ذره فرودی و اسپین ذره هدف درهم‌تنیدگی به‌وجود می‌آید که حضور میدان مغناطیسی منجر به جدایش تکانه ذره فرودی به دو مقدار مختلف و درعین‌حال باعث کاهش درهم‌تنیدگی می‌شود. درادامه نشان داده‌ایم که با استفاده از یک بسته موج گاوسی به‌عنوان ذره فرودی، می‌توان بین مکان ذره فرودی و اسپین ذره هدف درهم‌تنیدگی به‌وجود آورد. هرچه بسته موج جایگزیده‌تر باشد، عدم قطعیت در تکانه آن بیشتر می‌شود و بنابراین برای اینکه درهم‌تنیدگی مکان بیشتری داشته باشیم، نیاز به افزایش فاصله بین تکانه‌های موج فرودی پس از پراکندگی بیشتر شود که به مفهوم افزایش میدان مغناطیسی است. باتوجه به‌اینکه افزایش میدان مغناطیسی خود منجر به کاهش درهم‌تنیدگی می‌شود، در محاسبات نشان داده‌ایم که به ازای یک میدان مغناطیسی بیشینه $B_{\max}$ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. از این درهم‌تنیدگی می‌توان برای تعیین مکان ذره در اندازه‌گیری غیرمخرب استفاده نمود.

۲- مدل

سامانه‌ای متشکل از یک کیوبیت جایگزیده به همراه یک میدان مغناطیسی در محل آن و یک کیوبیت فرودی با برهم‌کنش اسپینی هایزنبرگ بین آنها در نظر می‌گیریم. هامیلتونی این سامانه عبارت است از

$$H = \frac{P_1^2}{2m} + V_0 \vec{S}_1 . \vec{S}_2 \delta(x) + B S_2^z , \qquad (۱)$$

که در آن P تکانه ذره فرودی، V_0 قدرت برهم‌کنش اسپینی هایزنبرگ، S_i (i=1,2) عملگر اسپینی ذره فرودی و هدف و B معیاری از اندازه میدان مغناطیسی در مکان ذره هدف که مختصرنویسی $B \equiv \mu_B B$ است که در آن μ_B مگنتون بوهر است. با درنظر گرفتن اینکه در این مسائل پراکندگی انرژی پایسته ولی بردار موج پایسته نیست، ویژه حالت‌های هامیلتونی سامانه بدون در نظر گرفتن جمله برهم‌کنش اسپینی عبارتند از

$$|k,\uparrow\uparrow\rangle,\ |k,\uparrow\downarrow\rangle,\ |k',\downarrow\uparrow\rangle,\ |k',\downarrow\downarrow\rangle, \qquad (۲)$$

که در آن بخش مربوط به بردار موج آن، موج تخت $|k\rangle = e^{ikx}$ با $k = \sqrt{2(E-B)}$ و $k' = \sqrt{2(E+B)}$ با انرژی موج E و $|\uparrow\downarrow\rangle$ نمایانگر جهت اسپین ذرات هستند. حالت‌های $|E,k,\uparrow\uparrow\rangle$ و $|E,k',\downarrow\downarrow\rangle$ ویژه حالت‌های همزمان S_2^z و $\vec{S}_1.\vec{S}_2$ هستند ولی دو حالت دیگر ویژه حالت $\vec{S}_1.\vec{S}_2$ نیستند. بنابراین ترکیب خطی زیر را به‌عنوان حالت اولیه در نظر می‌گیریم (با حذف علامت یکسان E).

$$|\psi\rangle_{in} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2+|\beta|^2}}(\alpha|k,\uparrow\downarrow\rangle + \beta|k',\downarrow\uparrow\rangle). \qquad (۳)$$

با توجه به وجود پتانسیل در $x=0$ و قواعد پراکندگی،

$$|\psi(x)\rangle = \begin{cases} |\psi\rangle_{in} + R\ |\psi\rangle_{in} & x<0 \\ T\ |\psi\rangle_{in} & x \geq 0 \end{cases} \qquad (۴)$$

که در آن R و T به ترتیب ضرایب بازتاب و عبور هستند.

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06]

از پیوستگی تابع موج در ($x=0$) و با توجه به وابستگی نمایی تابع موج به x (موج تخت)، رابطه $T-R=1$ برای ضرایب بازتاب R و عبور T به‌دست می‌آید. استفاده از این رابطه و شرط پیوستگی شیب تابع موج، منجر به نتایج زیر می‌شود.

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{(-k+k'+\sqrt{k^2+14kk'+k'^2})}{4k'}. \qquad (۵)$$

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2}=-\frac{(k-k'+\sqrt{k^2+14kk'+k'^2})}{4k'}. \qquad (۶)$$

$$T_1=-\frac{-4kk'+\mathrm{i}(k+k')V_0+\mathrm{i}V_0\sqrt{(k^2+14kk'+k'^2)}}{4kk'-2\mathrm{i}(k+k')V_0+3V_0^2}. \qquad (۷)$$

$$T_2=\frac{4kk'-\mathrm{i}(k+k')V_0+\mathrm{i}V_0\sqrt{(k^2+14kk'+k'^2)}}{4kk'-2\mathrm{i}(k+k')V_0+3V_0^2}.$$

$$R_{1(2)}=1+T_{1(2)}. \qquad (۸)$$

(۹)

در فاصله‌های دور از مبدا در سمت‌های چپ و راست محور، حالت به‌دست آمده تنها شامل بخش بازتاب یافته یا عبوری است. وجود میدان مغناطیسی منجر به پراکندگی به بردار موج‌های متفاوت می‌شود. با توجه به حالت‌های اسپینی و تکانه ذره فرودی ($|k,\uparrow\rangle,|k',\downarrow\rangle$) درهم‌تنیدگی بین اسپین ذره هدف و فرودی به مثابه درهم‌تنیدگی بین اسپین ذره هدف و تکانه ذره فرودی است. با در نظر گرفتن حالت فرودی به‌صورت $|k,\uparrow\downarrow\rangle$ حالت بازتاب یافته به‌صورت زیر است.

$$|\psi\rangle_R=C_{R1}|k,\uparrow\downarrow\rangle+C_{R2}|k',\downarrow\uparrow\rangle, \qquad (۱۰)$$

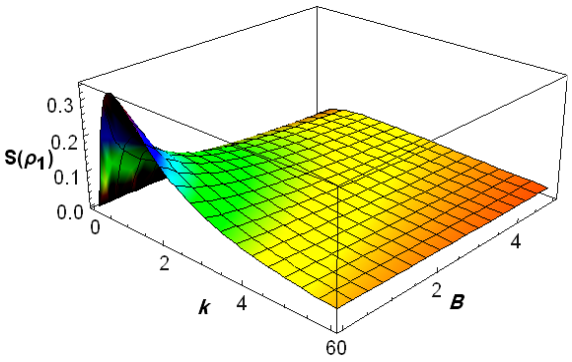
که در آن $C_{R1}=\frac{R_2\beta_1/\alpha_1-R_1\beta_2/\alpha_2}{\beta_1/\alpha_1-\beta_2/\alpha_2}$ و $C_{R2}=\frac{\beta_1}{\alpha_1}\frac{\beta_2}{\alpha_2}\frac{R_2-R_1}{\beta1/\alpha1-\beta2/\alpha2}$ است. با استفاده از شرط پایستگی انرژی $k'=\sqrt{k^2+4B}$ است. در شکل ۱ درهم‌تنیدگی بین اسپین (تکانه) فرودی و اسپین هدف برای حالت بازتابی برحسب بردار موج فرودی و اندازه میدان مغناطیسی، رسم شده است. این درهم‌تنیدگی برحسب آنتروپی فون‌نویمن و با استفاده از ماتریس چگالی کاهش یافته ذره فرودی عبارت است از

$$S(\rho_1)=-(16k^2Ln[\frac{16k^2}{A_1}]+A_2Ln[\frac{A_2}{A_1}])/A_3, \qquad (۱۱)$$

که در آن

$$A_1=9+36k^2+16(B+16Bk^2+4k(k^3+\sqrt{4B+k^2})),$$
$$A_2=9+20k^2+16(B+16Bk^2+4k(k^3+\sqrt{4B+k^2})),$$
$$A_3=9+16B+4(9+64B)k^2+64k^4+64k\sqrt{4B+k^2}.$$

(۱۱)



شکل ۱: درهم‌تنیدگی بین اسپین (تکانه) فرودی و اسپین هدف برای حالت بازتابی برحسب بردار موج فرودی و اندازه میدان مغناطیسی به‌ازای $V_0=1$.

با توجه به نتایج به‌دست آمده، بیشینه درهم‌تنیدگی به ازای یک بردار موج خاص $k\approx1$، به‌دست می‌آید و درعین‌حال با افزایش میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد. اگرچه نقش میدان مغناطیسی در ایجاد درهم‌تنیدگی مخرب است ولی وجود آن منجر به ایجاد حالت‌های با تکانه مختلف می‌شود که از این خاصیت در بخش بعد برای ایجاد درهم‌تنیدگی اسپین و مکان استفاده می‌نماییم.

۳- درهم‌تنیدگی بین اسپین و مکان

در این بخش به امکان ایجاد درهم‌تنیدگی بین اسپین و مکان ذره می‌پردازیم. بدین منظور به‌جای موج تخت برای ذره فرودی از یک بسته موج گاوسی استفاده می‌نماییم.

$$|\psi\rangle_{in}=\psi(x)|\uparrow\downarrow\rangle, \qquad (۱۳)$$

که در آن

$$\psi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{1/4}\sqrt{\sigma}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}}e^{ik_0x}. \qquad (۱۴)$$

و معادل آن در فضای تکانه

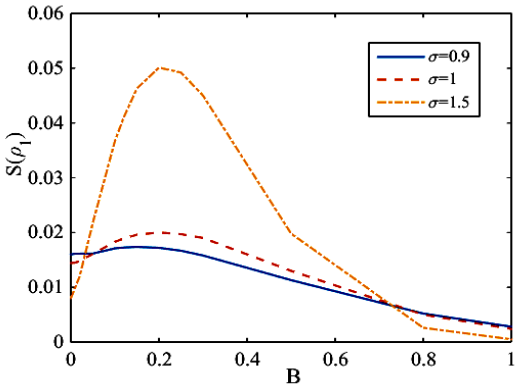
این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06]

$\varphi(k)=(\frac{2}{\pi})^{1/4}\sqrt{\sigma}e^{-\sigma^2(k-k_0)^2}e^{ik_0x}$ است. به‌ازای σ کوچکتر، موج در فضای مکان جایگزیده‌تر و در فضای تکانه پهن‌تر است و به ازای $\sigma\to\infty$ به حالت مساله بخش قبل تبدیل می‌شود. بنابراین تابع موج بازتابیده شده عبارت است از

$$|\psi\rangle_R = C_{R1}(-k)\phi(-k)|\uparrow\downarrow\rangle + C_{R2}(-k')\phi(-k')|\downarrow\uparrow\rangle, \quad (۱۵)$$

که در آن ضرایب $C_{R1(2)}$ از روابط به‌دست آمده در بخش قبل به‌دست آمده‌اند. برای محاسبه عناصر ماتریس چگالی موج بازتابی برروی بردار موج k از صفر تا بی‌نهایت انتگرال‌گیری می‌شود. درهم‌تنیدگی بین حالت‌های اسپینی بسته موج فرودی و ذره هدف به مانند آنچه در بخش قبل مطرح شد، به مثابه درهم‌تنیدگی بین تکانه ذره فرودی با اسپین ذره هدف است. با توجه به ارتباط بین تکانه و مکان بسته موج، این درهم‌تنیدگی را می‌توان به مکان ذره نیز نسبت داد. درهم‌تنیدگی موج بازتابی را با استفاده از آنتروپی فون‌نویمن به ازای $V_0=1,\ k_0=1$ برحسب σ و به‌ازای مقادیر مختلف از B محاسبه نموده‌ایم. به علت پیچیدگی از بیان رابطه حاصل شده اجتناب نموده و منحنی تغییرات آن در شکل ۲ رسم شده است.



شکل ۲: درهم‌تنیدگی بین اسپین (تکانه) بسته موج فرودی و اسپین هدف برای حالت بازتابی برحسب اندازه میدان مغناطیسی B و به‌ازای مقادیر مختلف پهن شدگی σ موج فرودی و $V_0=1,\ k_0=1$.

همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود، با افزایش مقادیر σ مقدار آنتروپی تا یک $B_{\max}\approx 0.2$ افزایش می‌یابد و بعد از آن درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد. دلیل این رفتار وجود یک عدم قطعیت در k به ازای یک σ مشخص است که برای آن حالت‌های بازتابیده از یکدیگر قابل تفکیک باشند.

افزایش میدان مغناطیسی منجر به تفکیک بیشتر حالت‌ها در فضای تکانه می‌شود ولی درعین‌حال باعث کاهش درهم‌تنیدگی نیز می‌شود. افزایش مقدار σ نیز منجر به جایگزیدگی بیشتر موج در فضای تکانه می‌شود و می‌تواند به افزایش درهم‌تنیدگی کمک کند. هدف ما از اعمال میدان مغناطیسی، جدایش بین دو موج بازتاب یافته است و در عین‌حال جایگزیده‌تر شدن موج‌ها در فضای مکان است. با توجه به نتایج به‌دست آمده، بین افزایش میدان مغناطیسی و کاهش مقدار پهن‌شدگی موج در مکان ذره، یک حد بهینه وجود دارد.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی برهم‌کنش یک ذره یا موج فرودی بر روی یک ذره هدف جایگزیده با برهم‌کنش اسپینی هایزنبرگ و در حضور میدان مغناطیسی موضعی پرداخته‌ایم. حضور میدان مغناطیسی منجر به تفکیک تکانه امواج بازتابی و یا عبوری می‌شود، به‌گونه‌ایکه هر کدام از اموج بازتابی یا عبوری، ترکیب دو موج با دو تکانه k و k' می‌شود. بنابراین امکان ایجاد درهم‌تنیدگی بین اسپین ذره هدف و تکانه موج فرودی به‌وجود می‌آید. درعین‌حال با درنظر گرفتن بسته موج برای ذره فرودی درهم‌تنیدگی ذکر شده را می‌توان به مکان جایگزیده موج بازتابی نیز مربوط دانست و به تعبیری درهم‌تنیدگی را بین اسپین و مکان درنظر گرفت. از این موضوع می‌توان در اندازه‌گیری‌های غیر مخرب برای مکان ذره بازتابی استفاده نمود.

مراجع

[1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang;" Quantum Computation and Quantum Information"; Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[2] D. Bouwmeester, A. Ekert, A. Zeilinger, "The Physics of Quantum Information: Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum Computation", Springer, Oxford, 2000.

[3] Y. Hida, H. Nakazato, K. Yuasa, Y. Omar, "Entanglement generation by qubit scattering in three dimensions", Phys. Rev. A **80**, 012310 (2009).

[4] K. Mishima, M. Hayashi, S.H. Lin, "Entanglement in scattering processes", Phys. Lett. A **333**, 371 (2004).

[5] G. Cordourier-Maruri, F. Ciccarello, Y. Omar, M. Zarcone, R. de Coss, S. Bose, "Implementing quantum gates through scattering between a static and a flying qubit ", Phys. Rev. A **82**, 052313 (2010).

[6] R. Weder, "Entanglement creation in low-energy scattering", Phys. Rev. A **84**, 062320 (2011).

[7] D. Home, A.S. Majumdar, A. Matzkin," Effects of a transient barrier on wavepacket traversal " J. Phys. A **45**, 295301 (2012).

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-06]