بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

اثرات کانال یونی و میدان مغناطیسی محوری بر نرخ رشد امواج در لیزر الکترون آزاد با ویگلر پیچشی

مونا احمدی و تقی محسن پور

دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک، دانشگاه مازندران، بابلسر

چکیده - رابطه پاشندگی امواج در لیزر الکترون آزاد با ویگلر پیچشی در کانال یونی و میدان مغناطیسی محوری بدست می آید. این رابطه پاشندگی به منظور مطالعه برهم کنش ناپایدار امواج به طور عددی برای مدارهای گروه I حل می شود. حل عددی نشان می دهد که نرخ رشد در مدارهای گروه I در حضور کانال یونی و میدان مغناطیسی محوری تغییر می کند.

کلید واژه- رابطه پاشندگی، لیزر الکترون آزاد، ناپایداری، کانال یونی، میدان مغناطیسی.

Ion-Channel and Axial Magnetic Field Effects on Growth Rate of waves in Free Electron Laser with Helical Wiggler

Mona Ahmadi, Taghi Mohsenpour

Department of Physics, University of Mazandaran, Babolsar

Abstract- Dispersion relation of waves in a free electron laser with helical wiggler and ion-channel and axial magnetic field is derived. This dispersion relation is solved numerically to study the instable interaction among all waves modes. It is found that the growth rate for group I orbits has been affected by the presence of the ion-channel and axial magnetic field.

Keywords: dispersion relation, free electron laser, instability, ion-channel, axial magnetic field

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-03]

۱- مقدمه

هدایت کانال یونی در لیزر الکترون آزاد به گونه ای است که بار مثبت یونها تحت تاثیر جاذبه کولنی مانع از واگرایی باریکه الکترونی می شود که این تکنیک اولین بار توسط Takayama و Hiramatsu در لیزر الکترون آزاد بکار گرفته شد.[۱] مسیر حرکت الکترون در ویگلر پیچشی درحضور کانال یونی یا میدان مغناطیسی محوری بررسی شده است.[۲-۵] در سال های اخیر، مسیرهای تعادلی الکترون در لیزر آزاد با ویگلر پیچشی و در حضور میدان مغناطیسی محوری و کانال یونی، بررسی شد.[۷] هدف از این مقاله، بررسی نرخ رشد امواج در لیزر الکترون آزاد با ویگلر پیچشی و ترکیب میدان مغناطیسی محوری و کانال یونی می باشد.

۲- مدارهای حالت- پایا

فرض می شود الکترون نسبیتی با سرعت $v_{||}$ ثابت در طول محور z میدان مغناطیسی ویگلر پیچشی یک بعدی که به صورت

$$\mathbf{B} = B_w\left(\hat{\mathbf{x}}\cos k_w z + \hat{\mathbf{y}}\sin k_w z\right), \qquad (۱)$$

توصیف می شود در حضور میدان مغناطیسی $B_0\,\hat{\mathbf{z}}$ و کانال یونی که به صورت زیر توصیف می شود، حرکت می کند

$$\mathbf{E} = 2\pi e n_i\left(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}\right),$$

که n_i چگالی تعداد یونها می باشد. مسیرهای حالت پایا از حل معادله نیروی لورنتس بدست می آید که مارپیچ است با مولفه های سرعت

$$\beta_x = \beta_w \cos k_w z, \qquad (۲)$$

$$\beta_y = \beta_w \sin k_w z, \qquad (۳)$$

که

$$\beta_w = \frac{\Omega_w \beta_{||}}{\omega_i^2 - \beta_{||}\left(\beta_{||} - \Omega_0\right)},$$

و $\omega_i^2 = 2\pi n_i e^2/m\gamma k_w c$ ، $\Omega_{0,w} \equiv eB_{0,w}/\gamma k_w mc^2$ ، $\beta_{x,y,w,||} = v_{x,y,w,||}/c$ می باشند. v_w را سرعت عرضی تولید شده توسط میدان مغناطیسی ویگلر گویند. در معادله های (۲) و (۳) وقتی ω_i را برابر صفر بگیریم، سرعت عرضی حرکت الکترون در میدان مغناطیسی ویگلر پیچشی و محوری بدست می آید[۲] و اگر Ω_0 را برابر صفر بگیریم، سرعت عرضی حرکت الکترون در میدان مغناطیسی ویگلر پیچشی و کانال یونی بدست می آید.[۳]

۳- رابطه پاشندگی

به منظور بررسی چگونگی برانگیختگی امواج، معادله های خطی شده پیوستگی، تکانه و موج را در نظر می گیریم که هست:

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 \nabla.\delta\mathbf{v} + \mathbf{v}_0 \nabla.\delta n = 0, \qquad (4)$$

$$\frac{d\delta\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}_0.\nabla\delta\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}.\nabla\mathbf{v}_0 = -\frac{e}{m_0\gamma}\left[\delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0\cdot\delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_0\delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}_0 - \frac{1}{c^2}\delta\mathbf{v}\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}\delta\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0 + \frac{1}{c}\mathbf{v}_0\times\delta\mathbf{B} - \frac{\gamma_0^2}{c^2}(\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}_0 - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}_0\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{E}_0)(\mathbf{v}_0\cdot\delta\mathbf{v})\right] \qquad (۵)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\delta\mathbf{E}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\delta\mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{4\pi e}{c^2}(\delta n\mathbf{v}_0 + n_0\delta\mathbf{v}) \qquad (۶)$$

که δn، $\delta\mathbf{v}$، $\delta\mathbf{R}$، $\delta\mathbf{B}$، $\delta\mathbf{E}$ به ترتیب چگالی اختلالی، سرعت اختلالی، شعاع اختلالی باریکه الکترونی، میدان مغناطیسی و الکتریکی اختلالی می باشد. کمیت های اختلالی شامل امواج الکترومغناطیسی پلاریزه راستگرد و چپگرد و موج بار-فضا می باشد که تمام این امواج در جهت مثبت محور z منتشر می شوند. عدد موج این امواج مستقل از هم نیستند و با رابطه $k_R = k - k_w$ و $k_L = k + k_w$ بهم مرتبطند.

با در نظرگرفتن دستگاه مختصات مختلط به صورت $\hat{\mathbf{e}} = \frac{(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})}{\sqrt{2}}$ و $\hat{\mathbf{e}}^* = \frac{(\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}})}{\sqrt{2}}$ و $\hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{z}}$ می توان کمیت های اختلالی و غیر اختلالی را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{iA_b R}{\sqrt{2}}(-e^{-ik_w z}\hat{\mathbf{e}} + e^{ik_w z}\hat{\mathbf{e}}^*)$$

$$\mathbf{B}_0 = (\frac{B_w}{\sqrt{2}})(e^{-ik_w z}\hat{\mathbf{e}} + e^{ik_w z}\hat{\mathbf{e}}^*) + B_0\hat{\mathbf{e}}_z$$

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-03]

$$\delta\mathbf{E}=\delta E_R\hat{\mathbf{e}}+\delta E_L\hat{\mathbf{e}}^*+\delta E_z\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\delta E_R=\tilde{E}_R\exp[i(k_Rz-\omega t)]$$

$$\delta E_L=\tilde{E}_L\exp[i(k_Lz-\omega t)]$$
$$\delta E_z=\tilde{E}_z\exp[i(kz-\omega t)]$$

با قرار دادن کمیت های اختلالی در معادله تکانه مربوط به باریکه الکترونی، ۳ معادله بر حسب $\tilde{v}_R$، $\tilde{v}_L$، $\tilde{v}_z$، $\tilde{E}_R$، $\tilde{E}_L$، $\tilde{E}_z$، $\tilde{n}_b$ بدست می آید که $\tilde{n}_b$ را با استفاده از معادله پیوستگی مربوط به باریکه الکترونی می توان حذف کرد. اکنون سه مولفه معادله تکانه مربوط به باریکه الکترونی را حل می کنیم و $\tilde{v}_R$، $\tilde{v}_L$، $\tilde{v}_z$ را بر حسب $\tilde{E}_R$، $\tilde{E}_L$، $\tilde{E}_z$ بدست می آوریم. با قرار دادن روابط بدست آمده در معادله اختلالی موج، به سه دستگاه سه معادله سه مجهول بر حسب $\tilde{E}_R$، $\tilde{E}_L$، $\tilde{E}_z$ زیر می رسیم.

$$\begin{cases}k_1\tilde{E}_R+k_2\tilde{E}_L+k_3\tilde{E}_z=0\\ k_4\tilde{E}_R+k_5\tilde{E}_L+k_6\tilde{E}_z=0\\ k_7\tilde{E}_R+k_8\tilde{E}_L+k_9\tilde{E}_z=0\end{cases}\qquad(۷)$$

در عبارت فوق k_1 رابطه پاشندگی مربوط به موج راستگرد در غیاب دو موج دیگر و k_5 رابطه پاشندگی مربوط به موج چپگرد در غیاب دو موج دیگر و همچنین k_9 رابطه ی پاشندگی مربوط به موج بار فضا در غیاب دو موج دیگر می باشد. شرط لازم و کافی برای داشتن جواب دستگاه سه معادله سه مجهولی (۷) این است که دترمینان ضرایب مساوی با صفر قرار گیرد. در نتیجه رابطه پاشندگی به صورت زیر بدست خواهد آمد

$$k_1(k_5k_9-k_6k_8)+k_2(k_6k_7-k_4k_9)$$
$$+k_3(k_4k_8-k_5k_7)=0\qquad(۸)$$

این رابطه مربوط به امواج الکترومغناطیس و الکترواستاتیک جفت شده ای است که در طول باریکه الکترونی با میدان مغناطیسی ویگلر پیچشی و کانال یونی و میدان مغناطیسی محوری منتشر می شوند. ضرایب k_1 تا k_9 در پیوست معرفی شده است.

$$k_1=\left[\omega-k_Rv_{||}-\frac{\omega_i^2}{\omega-k_Rv_{||}}\left(1-\frac{v_\omega^2}{2c^2}\right)-\frac{\omega_i^2}{k_\omega v_{||}}\frac{v_\omega^2}{2c^2}\right.$$
$$\left.-\Omega_0+A_3\right]\left(k_R^2-\omega^2c^2\right)+\omega_p^2\left[\omega\left(1-\frac{v_\omega^2}{2c^2}\right)-k_Rv_{||}\right]$$

$$k_2=\left(\frac{\omega_i^2}{\omega-k_Lv_{||}}\frac{v_\omega^2}{2c^2}+\frac{\omega_i^2}{k_\omega v_{||}}\frac{v_\omega^2}{2c^2}+A_3\right)\left(k_L^2c^2-\omega^2\right)$$
$$-\omega\omega_p^2\frac{v_\omega^2}{2c^2}$$

$$k_3=\left[\omega-k_Rv_{||}-\frac{\omega_i^2}{\omega-k_Rv_{||}}\left(1-\frac{v_\omega^2}{2}\right)-\Omega_0+2A_3\right.$$
$$\left.\frac{\omega_i^2}{\omega-k_Lv_{||}}\frac{v_\omega^2}{2c^2}\right]k\omega\frac{v_\omega}{\sqrt{2}}-\omega A_4\left(\omega-kv_{||}\right)-\omega\omega_p^2\frac{v_\omega v_{||}}{\sqrt{2}c^2}$$

$$k_4=\left(\frac{\omega_i^2}{\omega-k_Rv_{||}}\frac{v_\omega^2}{2c^2}-\frac{\omega_i^2}{k_\omega v_{||}}\frac{v_\omega^2}{2c^2}-A_3\right)\left(k_R^2c^2-\omega^2\right)$$
$$-\omega\omega_p^2\frac{v_\omega^2}{2c^2}$$

$$k_5=\left[\omega-k_Lv_{||}-\frac{\omega_i^2}{\omega-k_Lv_{||}}\left(1-\frac{v_\omega^2}{2c^2}\right)-\frac{\omega_i^2}{k_\omega v_{||}}\frac{v_\omega^2}{2c^2}\right.$$
$$\left.+\Omega_0-A_3\right]\left(k_L^2-\omega^2c^2\right)+\omega_p^2\left[\omega\left(1-\frac{v_\omega^2}{2c^2}\right)-k_Lv_{||}\right]$$

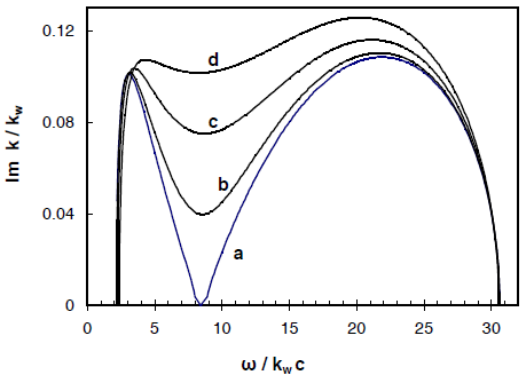
$$k_6=\left[\omega-k_Lv_{||}-\frac{\omega_i^2}{\omega-k_Lv_{||}}\left(1-\frac{v_\omega^2}{2}\right)-\Omega_0+2A_3\right.$$
$$\left.\frac{\omega_i^2}{\omega-k_Lv_{||}}\frac{v_\omega^2}{2c^2}\right]k\omega\frac{v_\omega}{\sqrt{2}}-\omega A_4\left(\omega-kv_{||}\right)-\omega\omega_p^2\frac{v_\omega v_{||}}{\sqrt{2}c^2}$$

$$k_7=\omega_p^2\frac{v_\omega}{\sqrt{2}c}\left(k_Rc-\frac{v_{||}}{c}\omega\right)-\left[\frac{\omega_i^2}{k_\omega v_{||}}\frac{v_\omega v_{||}}{\sqrt{2}c^2}-\frac{\Omega_\omega}{\sqrt{2}}\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_i^2}{\omega-k_Rv_{||}}\frac{v_\omega v_{||}}{\sqrt{2}c^2}\right]\left(k_R^2c^2-\omega^2\right)$$

$$k_8=\omega_p^2\frac{v_\omega}{\sqrt{2}c}\left(k_Lc-\frac{v_{||}}{c}\omega\right)-\left[-\frac{\omega_i^2}{k_\omega v_{||}}\frac{v_\omega v_{||}}{\sqrt{2}c^2}+\frac{\Omega_\omega}{\sqrt{2}}\right.$$
$$\left.-\frac{\omega_i^2}{\omega-k_Lv_{||}}\frac{v_\omega v_{||}}{\sqrt{2}c^2}\right]\left(k_L^2c^2-\omega^2\right)$$

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-03]

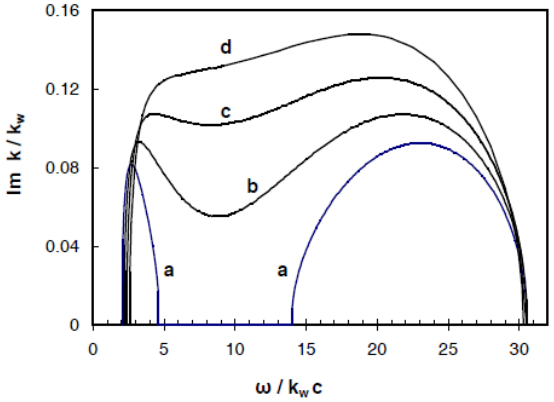
$$k_9 = -\omega\left(\omega - kv_{||}\right)^2 + \omega\omega_p^2\gamma_{||}^{-2} + kv_{||}\omega\frac{v_\omega^2}{2c^2} \times\left(\frac{\omega_i^2}{\omega - k_R v_{||}} + \frac{\omega_i^2}{\omega - k_L v_{||}}\right)$$



شکل ۱: نمودار نرخ رشد امواج به ازای $\Omega_0/k_w c = 0.2$، a به ازای $\omega_i/k_w c = 0$، b به ازای $\omega_i/k_w c = 0.1$، c به ازای $\omega_i/k_w c = 0.2$، d به ازای $\omega_i/k_w c = 0.3$.

۴- تحلیل عددی

به منظور بررسی ناپایداری امواج رابطه پاشندگی (۸) را بطور عددی حل می کنیم. حل عددی نشان می دهد که مد کند موج بار-فضا با مد فرار $(escape)$ موج الکترومغناطیس جفت می شوند که نرخ رشد ناپایداری آنها در شکل (۱) و (۲) نشان داده شده است. در شکل (۱) نرخ رشد امواج الکترومغناطیس و الکترواستاتیک در لیزر لکترون آزاد با فرکانس سیکلترون نرمالیزه شده $\Omega_0/k_w c = 0.2$ به ازای $\omega_i/k_w c = 0$ (منحنی a) و $\omega_i/k_w c = 0.1$ (منحنی b) و $\omega_i/k_w c = 0.2$ (منحنی c) و $\omega_i/k_w c = 0.3$ (منحنی d) نشان می دهد. شکل (۱) نشان می دهد که با افزایش چگالی کانال یونی نرخ رشد افزایش می یابد. نرخ رشد مد کند موج بار-فضا با مد فرار موج الکترومغناطیس در لیزر الکترون آزاد با $\omega_i/k_w c = 0.3$ به ازای $\Omega_0/k_w c = 0$ (منحنی a) و $\Omega_0/k_w c = 0.1$ (منحنی b) و $\Omega_0/k_w c = 0.2$ (منحنی c) و $\Omega_0/k_w c = 0.3$ (منحنی d) در شکل (۲) نشان داده شده است. شکل (۲) نشان می دهد که با افزایش میدان مغناطیسی محوری نرخ رشد افزایش می یابد. نتایج عددی نشان می دهد که ترکیب میدان مغناطیسی محوری و کانال یونی باعث افزایش نرخ رشد امواج می گردد.



شکل ۱: نمودار نرخ رشد امواج به ازای $\Omega_0/k_w c = 0.2$، a به ازای $\omega_i/k_w c = 0$، b به ازای $\omega_i/k_w c = 0.1$، c به ازای $\omega_i/k_w c = 0.2$، d به ازای $\omega_i/k_w c = 0.3$.

مراجع

[1] H. P. Freund and J. M. Antonsen, "Principles of Free-Electron Lasers", (Chapman and Hall, London, 1992.

[2] M. Esmaeilzadeh, J. E. Willett, and L. J. Willett, **J. Plasma Physics** 72, (2006) 59 .

[3] M. Esmaeilzadeh, J. E. Willett, and L. J. Willett, **J. Plasma Physics** 71, (2005) 367.

[4] T. Mohsenpour, B. Maraghechi, and S. Mirzanejhad, **Phys. Plasmas** 14, (2007). 053106.

[5] T. Mohsenpour, and B. Maraghechi, **Phys. Plasmas**, 15, 1 (2008).

[6] M. Esmaeilzadeh, H. Mehdian, and J. E. Willett, **J. Plasma Physics 70**, (2004) 9.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-03]