بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

درهم‌تنیدگیِ تقطیرپذیر در سامانه‌ی اتم دوترازه و فوتون‌های همدوس یا چلانده در کاواک اتلافی

فاطمه یدالهی[۱]، رزا صفایی[۲]، محمدمهدی گلشن[۱]
[۱]بخش فیزیک، دانشگاه شیراز، شیراز
[۲] دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه شیراز، شیراز

چکیده- در این مقاله درهم‌تنیدگیِ بین توزیع‌های فوتونیِ همدوس یا چلانده و یک اتم دوترازه، درونِ کاواکی اتلافی در دمای صفر مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای بررسی تحول زمانیِ درهم‌تنیدگی از معیار منفیت استفاده شده و بدین‌منظور معادله‌ی اصلیِ حاکم برسامانه‌ی اتم-فوتون در تقریب سکولار، برای حالت اولیه‌ای که در آن توزیع فوتونی همدوس یا چلانده است، حل می‌شود. سپس عناصر ماتریس چگالیِ سامانه که به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده‌اند ترانهاده‌یِ جزئی شده و برای محاسبه‌ی عددیِ منفیت، مورد استفاده قرار می‌گیرد. محاسبات ما نشان می‌دهد که با افزایش میانگین اولیه‌یِ فوتون‌ها، درهم‌تنیدگیِ اتم با توزیع همدوس نسبت به توزیع چلانده، بسیار سریع‌تر به سمت صفر میل می‌کند. هم‌چنین نشان می‌دهیم که درهم تنیدگیِ نور چلانده با اتم، در مقایسه با نور همدوس قوی‌تر و پایدارتر بوده و بازه‌های زمانی که در آن درهم‌تنیدگیِ اتم-فوتون تقطیرپذیر است، برای نور چلانده طولانی‌تر از نور همدوس است. این نتایج می‌تواند بالقوه در تولید حالت‌های اتم- فوتون با بیشینه‌ی درهم‌تنیدگی (حاصل از تقطیر) به‌کار رود.

کلید واژه- درهم‌تنیدگیِ اتم-فوتون، کاواک اتلافی، معادله‌ی اصلی، توزیع فوتونی همدوس، توزیع فوتونیِ چلانده.

Distillable Entanglement between Photonic Coherent or Squeezed Distributions and a Two-Level Atom in a Damping Cavity

Fatemeh Yadollahi[1], Roza Safaiee[2], Mohammad Mehdi Golshan[1]

[1] Physics Department, Shiraz University, Shiraz
[2]Faculty of Advanced Technologies, Shiraz University, Shiraz

Abstract- In the present study, the entanglement between photonic coherent or squeezed distributions and a two-level atom in a leaky cavity at zero temperature, is reported. To investigate the time evolution of atom-photon entanglement the master equation for the density matrix, in the secular approximation, is solved. We then proceed by partial transposing the analytical expressions so obtained to numerically compute the negativity as a function of time. Our results demonstrate that as the initial photon mean number increases, the atom-photon entanglement decays at a faster pace for the coherent distribution compared to the squeezed distribution. Moreover, it is shown that the degree of atom-photon entanglement is much higher and more stable for the squeezed distribution than that for the coherent one. A consequence of the latter is that the time intervals during which the atom-photon entanglement is distillable is longer for the squeezed distribution. The results of the present report are of great potential in forming maximal entangled states of atom-photon systems, through distillation.

Keywords: atom-photon entanglement, cavity damping, master equation, photonic coherent distribution, photonic squeezed distribution.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

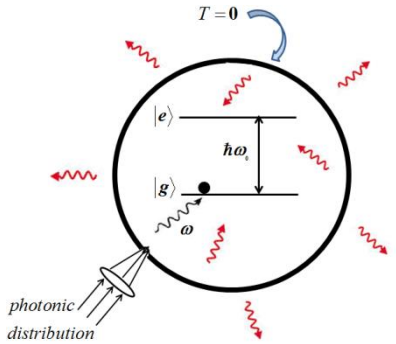
[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-08]

۱- مقدمه

درهم‌تنیدگی یکی از مفاهیم کاملاً کوانتومی است که نقش مهمی در تئوری اطلاعات کوانتومی، محاسبات کوانتومی، رمزنگاریِ کوانتومی و فرابردِ کوانتومی دارد [۱]. در هر یک از این کاربردها اطلاعات ذخیره شده در سامانه‌ی درهم-تنیده، از طریق کانال‌های ارتباطی پردازش و منتقل می‌شود. در این صورت و در عمل، این کانال‌ها اثراتی مخرب بر رفتار درهم‌تنیدگی، به‌ویژه حالتی از آن که بیشینه‌ی درهم-تنیدگی را دارد، خواهد گذاشت. یک روش کارساز برای غلبه بر اثرات مخرب کانال‌های ارتباطی استفاده از تقطیر کوانتومی است[۲]. در ساده‌ترین صورتِ فرآیند تقطیر کوانتومی، جفت‌های درهم‌تنیده، با استفاده از عملگرهای موضعی و ارتباطات کلاسیکی به تعداد کمتری جفت با درهم‌تنیدگیِ بیشینه تبدیل می‌شوند [۳]. به‌عنوان یک قاعده‌ی کلی می‌توان گفت حالت‌هایی که ترانهاده‌ی جزئیِ ماتریس چگالیِ آن‌ها (ρ^{PT})، یک ماتریس غیرمنفی باشد ($\rho^{PT} \geq 0$) غیرقابل تقطیر هستند. از طرف دیگر، حالت‌هایی که دارای $\rho^{PT} < 0$ باشند، می‌توانند قابل تقطیر یا غیرقابل تقطیر باشند [۳]. برای سامانه‌های دوجزئی که ابعاد آن $2\times N$ باشد، شرط لازم و کافی برای تقطیرپذیری این است که $\rho^{PT} < 0$ باشد[۳]. از آن‌جا که فوتون‌ها حمل‌کننده‌ی سریع و ایده‌آل اطلاعات کوانتومی هستند و اتم‌ها واحدهای قابل اطمینان برای ذخیره‌سازیِ طولانی مدت و پردازش اطلاعات هستند، سامانه‌ی اتم-فوتون گزینه‌ی مناسبی برای ایجاد و کنترل حالت‌های درهم‌تنیده می‌باشد. از طرف دیگر با توجه به آن‌که به‌طور معمول برهم-کنشِ اتم-فوتون در یک کاواک صورت می‌پذیرد و نیز این واقعیت که کاواک‌ها در عمل اتلافی هستند، اثر این اتلاف را بر رفتار درهم‌تنیدگی می‌باید مورد نظر قرار داد [۴]. نکته‌ی دیگر که در بررسی رفتار درهم‌تنیدگی و تعیین تقطیرپذیریِ آن حائز اهمیت است، توزیع اولیه‌ی فوتون‌ها می‌باشد. در این مقاله معیار منفیت به منظور بررسیِ درهم‌تنیدگی بین یک اتم دوترازه و توزیعِ فوتونیِ همدوس یا چلانده در یک کاواک اتلافی در دمای صفر به‌کار رفته است. محاسبات ما نشان-دهنده‌ی این است که درهم‌تنیدگیِ اتم با نور چلانده، قوی‌تر و پایدارتر از درهم‌تنیدگیِ آن با نور همدوس است و در بازه-ی زمانیِ طولانی‌تری تقطیرپذیر می‌باشد. هم‌چنین با افزایش میانگین اولیه‌ی فوتون‌ها، درهم‌تنیدگیِ نور همدوس با اتم از درهم‌تنیدگیِ نور چلانده با اتم سریع‌تر کاهش می‌یابد.

۲- معادله‌ی اصلی

مطابق شکل ۱ برهم‌کنش یک میدان تک‌مد با فرکانس ω و یک اتم دوترازه که $|g\rangle$ و $|e\rangle$ به‌ترتیب حالت‌های پایه و برانگیخته‌اش را نمایش می‌دهند، در یک کاواک اتلافی در دمای صفر درنظر می‌گیریم.



شکل۱ : برهم‌کنش اتم دوترازه با میدان تک‌مد در کاواک اتلافی در دمای صفر.

معادله‌ی حاکم بر سامانه‌ی اتم-فوتون در حضور میرایی، معادله‌ی اصلی نامیده می‌شود که در دمای صفر در تصویر برهم‌کنش به‌صورت زیر است[۵]:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_I, \rho] - \frac{\gamma}{2}(a^\dagger a\rho - 2a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a) \qquad (۱)$$

در رابطه‌ی اخیر، $a^\dagger$ و a به‌ترتیب عملگرهای خلق و نابودی میدان هستند و ρ عملگر چگالیِ توصیف کننده‌ی سامانه‌ی اتم-فوتون است. γ ضریب میراییِ میدان کاواک است و در رابطه‌ی $\gamma = \omega/Q$، که در آن Q ضریب کیفیت کاواک است، صدق می‌کند. هم‌چنین H_I هامیلتونیِ برهم‌کنشِ اتم-فوتون در تصویر برهم‌کنش است که در حالت تشدید $\omega = \omega_0$ برابر است با:

$$H_I = \hbar\lambda\,(a|e\rangle\langle g| + a^\dagger|g\rangle\langle e|) \qquad (۲)$$

که در آن λ جفتیدگیِ اتم-فوتون است.

۳-درهم‌تنیدگیِ حالت‌های سامانه

در این تحقیق از معیار منفیت برای محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی استفاده می‌شود. مقیاس منفیت به‌ترتیب زیر تعریف می‌شود:

$$E_N = \sum_i \max(0, -\lambda_i) \qquad (۳)$$

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-08]

در این رابطه λ_i ویژه مقدار ماتریس ρ^{PT} است. اگر مقیاس E_N مثبت شود، سامانه درهم‌تنیده است و جایی که صفر شود، در مورد درهم‌تنیده بودن یا نبودن حالت‌ها نمی‌توان چیزی گفت. در این مقاله فرض می‌کنیم در لحظه‌ی اولیه، اتم در حالت پایه‌ی $|g\rangle$ قرار دارد و یک توزیعِ فوتونیِ همدوس یا چلانده با استفاده از چیدمان آزمایشگاهی که به‌ترتیب در [۶] و [۷] ارائه شده، تولید شده و به درون کاواک هدایت می‌شود. لازم به توضیح است که بسط حالت‌های همدوس و چلانده برحسب حالت‌های عددی به‌ترتیب به‌صورت زیر است:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad (۴)$$

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} (-\tanh r)^n |2n\rangle \qquad (۵)$$

به‌طوری که $\bar{n} = |\alpha|^2$ و $\bar{n} = \sinh^2 r$ به‌ترتیب میانگین تعداد فوتون‌ها در توزیع همدوس و چلانده است. بنابراین حالت اولیه‌ی سیستم اتم-فوتون که خالص و جداپذیر است، به‌صورت زیر است:

$$\rho(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_F(0) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_n C_m^* |g,n\rangle\langle g,m| \qquad (۶)$$

برای محاسبه‌ی منفیت، ابتدا باید ماتریس $\rho(t)$ را به‌دست آوریم. بدین‌منظور با تبدیل یکانیِ $W(t) = e^{iH_I t/\hbar} \rho(t) e^{-iH_I t/\hbar}$ معادله‌ی (۱) به معادله‌ی ساده‌تری برای $W(t)$ تبدیل می‌شود. با حل معادله‌ی جدید، عناصر ماتریس $W(t)$ را در پایه‌های H_I به‌دست می‌آوریم. در این مرحله از تقریب سکولار استفاده کنیم که در آن به‌دلیل این‌که برهم‌کنش اتم-فوتون بسیار قوی‌تر از اتلاف انرژی در کاواک است ($\lambda \gg \gamma$)، از جملات شدیداً نوسان کننده صرفنظر می‌کنیم. در نهایت با انجام عکس تبدیل یکانیِ فوق‌الذکر، عناصر ماتریس $\rho(t)$ را در پایه‌ی اتم-فوتون به‌صورت کاملاً تحلیلی به‌دست می‌آوریم:

$$\langle g,m+1|\rho(t)|g,n+1\rangle = e^{-\frac{\gamma}{2}t(m+n+1)} C_{m+1} C_{n+1}^* \cos(\lambda t\sqrt{m+1}) \cos(\lambda t\sqrt{n+1}) \quad \forall m \neq n \qquad (۷)$$

$$\langle g,m+1|\rho(t)|e,n\rangle = i\, e^{-\frac{\gamma}{2}t(m+n+1)} C_{m+1} C_{n+1}^* \cos(\lambda t\sqrt{m+1}) \sin(\lambda t\sqrt{n+1}) \quad \forall m \neq n \qquad (۸)$$

$$\langle e,m|\rho(t)|e,n\rangle = e^{-\frac{\gamma}{2}t(m+n+1)} C_{m+1} C_{n+1}^* \sin(\lambda t\sqrt{m+1}) \sin(\lambda t\sqrt{n+1}) \quad \forall m \neq n \qquad (۹)$$

$$\langle g,0|\rho(t)|g,n+1\rangle = e^{-\frac{\gamma}{2}t(n+\frac{1}{2})} C_0 C_{n+1}^* \cos(\lambda t\sqrt{n+1}) \qquad (۱۰)$$

$$\langle g,0|\rho(t)|e,n\rangle = i\, e^{-\frac{\gamma}{2}t(n+\frac{1}{2})} C_0 C_{n+1}^* \sin(\lambda t\sqrt{n+1}) \qquad (۱۱)$$

$$\langle g,0|\rho(t)|g,0\rangle = |C_0|^2 + \frac{\gamma}{2}\int_0^t F_0(t)\, dt \qquad (۱۲)$$

$$\langle g,n+1|\rho(t)|g,n+1\rangle = \frac{1}{2}[F_n(t) + e^{-\frac{\gamma}{2}t(2n+1)} |C_{n+1}|^2 \cos(\lambda t\sqrt{n+1})] \qquad (۱۳)$$

$$\langle e,n|\rho(t)|e,n\rangle = \frac{1}{2}[F_n(t) - e^{-\frac{\gamma}{2}t(2n+1)} |C_{n+1}|^2 \cos(\lambda t\sqrt{n+1})] \qquad (۱۴)$$

که در آن

$$F_n(t) = e^{-\gamma t(n+\frac{1}{2})}[|C_{n+1}|^2 + \sum_{j=n+1}^{M} \frac{(j+\frac{1}{2})!\,(1-e^{-\gamma t})^{j-n}}{(j-n)!\,(n+\frac{1}{2})!} |C_{j+1}|^2] \qquad (۱۵)$$

است. در روابط (۷) تا (۱۵)، $m,n = 0,1,2,\ldots$ می‌باشد و می‌توان نشان داد برای حالت چلانده در این روابط C_x به $C_{x/2}$ تبدیل می‌شود. با داشتن درایه‌های ماتریس چگالی به راحتی می‌توان آن‌را ترانهاده‌ی جزئی نمود. از آن‌جا که ابعاد ماتریس چگالیِ ترانهاده‌ی جزئی بسیار بزرگ است، برای محاسبه‌ی ویژه مقادیر آن باید به روش‌های عددی متوسل شد.

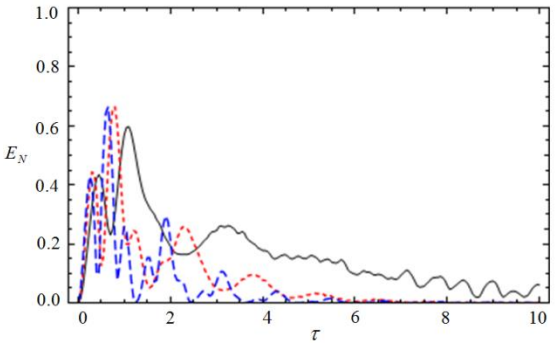
۴- نتایج عددی

به‌منظور بررسی اثر توزیع فوتونیِ اولیه بر درهم‌تنیدگیِ اتم-فوتون، رفتار منفیت برحسب $\tau = \lambda t$ (زمان بدون بعد) به ازای $\bar{n} = 8, 16, 24$ و $\gamma/\lambda = 0.01$ (نسبت میرایی به جفتیدگی) برای توزیع همدوس و چلانده، به‌ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رود در لحظه‌ی اولیه به‌دلیل جداپذیر بودن حالت سامانه، درهم‌تنیدگی صفر است. از طرفی به ازای هر $\bar{n}$، درجه‌ی درهم‌تنیدگیِ اتم-فوتون درحالی که نوسان می‌کند کاهش می‌یابد تا این‌که به‌صورت مجانبی به صفر میل کند. این رفتار زمانیِ درهم‌تنیدگی را می‌توان بدین‌صورت توضیح داد که در اثر برهم‌کنش فوتون‌ها با مدهای کاواک، آنسامبل اتم-فوتون شروع به آمیخته شدن می‌کند و بنابراین در لحظات اولیه‌ی برهم‌کنش، درهم‌تنیدگی رو به افزایش می‌رود. از آن‌جا که اتم و فوتون در طول برهم‌کنش با یکدیگر تبادل انرژی دارند، درهم‌تنیدگی یک رفتار نوسانی را از خود

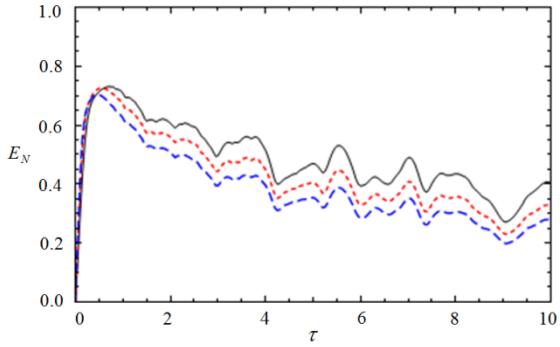
این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-08]

بروز می‌دهد. از طرفی به‌دلیل خروج انرژی از کاواک (کاواک اتلافی)، در زمان‌های طولانی، $\tau \gg \lambda/\gamma$، سامانه در حالت پایه‌ی خود ($|g,0\rangle$) که یک حالت جداپذیر است، قرار می‌گیرد. درنتیجه دامنه‌یِ نوساناتِ درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد و به‌طور مجانبی به صفر میل می‌کند. همان‌طور که از این دو شکل مشاهده می‌شود با افزایش $\bar{n}$ نرخ کاهش درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد. این پدیده را می‌توان با استفاده از تابع توزیع احتمال فوتونیِ اولیه که برای نور همدوس و چلانده به‌ترتیب با $|\langle n|\alpha\rangle|^2$ و $|\langle n|\zeta\rangle|^2$ داده می‌شود، توجیه کرد. بدین صورت که با افزایش $\bar{n}$، تابع توزیع احتمال بین تعداد بیش‌تری حالت فوتونی و به‌طور یکنواخت‌تری توزیع می‌شود. از طرفی به‌دلیل وجود اتلاف، آن توزیعی که یکنواخت‌تر است با گذشت زمان سریع‌تر پهن می‌شود به‌طوری که احتمال حضور حالت‌های برانگیخته در زمان‌های کوتاه‌تری صفر می‌شود. درنتیجه سامانه به حالت پایه رفته و درهم‌تنیدگی از بین می‌رود.



شکل۲ : نمودار منفیت برحسب τ برای نور همدوس به ازای $\gamma/\lambda = 0.01$ برای $\bar{n}=8$ (خط توپرِ سیاه)، $\bar{n}=16$ (نقطه‌چینِ قرمز)، و $\bar{n}=24$ (خط‌چینِ آبی).



شکل۳ : نمودار منفیت برحسب τ برای نور چلانده به ازای $\gamma/\lambda = 0.01$ برای $\bar{n}=8$ (خط توپرِ سیاه)، $\bar{n}=16$ (نقطه‌چینِ قرمز) و $\bar{n}=24$ (خط‌چینِ آبی).

نکته‌ی دیگر این است که به ازای $\bar{n}$ یکسان، درهم‌تنیدگیِ نور چلانده با اتم، قوی‌تر و پایدارتر از درهم‌تنیدگیِ نور همدوس با اتم است زیرا به ازای $\bar{n}$ یکسان، توزیع احتمال برای نور همدوس متقارن‌تر و یکنواخت‌تر از نور چلانده است و با گذشت زمان نیز این یکنواختی بیش‌تر حفظ می‌شود و بنا بر دلیل ارائه شده در پاراگراف قبل، سامانه سریع‌تر به حالت پایه می‌رود در نتیجه درهم‌تنیدگی سریع‌تر از بین می‌رود. از آن‌جا که سامانه $2\times N$ است، در بازه‌هایی که منفیت دارای مقادیر غیر صفر است، درهم‌تنیدگی تقطیرپذیر است. در زمان‌هایی که منفیت صفر است، اگر سامانه درهم‌تنیده باشد، لزوماً غیرقابل تقطیر است.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله درهم‌تنیدگی بین یک اتم دوترازه با فوتون‌های همدوس و چلانده در یک کاواک اتلافی در دمای صفر مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج محاسبات ما حاکی از آن است که درهم تنیدگیِ نور چلانده با اتم قوی‌تر و پایدارتر از درهم‌تنیدگیِ نور همدوس با اتم است. درهم‌تنیدگیِ نورچلانده در مقایسه با نور همدوس در مدت زمان طولانی‌تری قابل تقطیر است. هم‌چنین با افزایش میانگین اولیه‌ی فوتون‌ها، نرخ کاهش درهم‌تنیدگیِ اتم با نور همدوس نسبت به نور چلانده بیش‌تر است.

مراجع

[1] A. Reiserer, N. Kalb, G. Rempe, S. Ritter, "A quantum gate between a flying optical photon and a single trapped atom", Nature, Vol. 508, pp. 237-240, 2014.

[2] D. Bruß, "Characterizing entanglement", J. Math. Phys., Vol. 43, pp. 4237-4251, 2002.

[3] X.-F. Cai, X.-T. Yu, L.-H. "Partially entangled states bridge in quantum teleportation", Front. Phys., Vol. 9, pp. 646-651, 2014.

[4] V. Ceban, M. A. Macovei, "Cavity quantum interferences with three-level atoms", J. Opt. Soc. Amer. B, Vol.33, pp. 942-946, 2016.

[5] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Plank Equations*, p.16, Springer, 2000.

[6] N. Bruno, A. Martin, R. T. Thew, "Generation of tunable wavelength coherent states and heralded single photons for quantum optics", Opt. Commun., Vol. 327, pp. 17-21, 2014.

[7] V. Chille, S. Berg-Johansen, M. Semmler, P. Banzer, A. Aiello, G. Leuchs, C. Marquardt, "Experimental generation of amplitude squeezed vector beams", J. Opt. Soc. Amer., Vol. 24, pp. 12385-12394, 2016.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-08]