بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۴-۱۲ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

اثر دما بر رفتار زمانیِ درهم‌تنیدگی در سامانه‌ی اتم دوترازه و فوتون‌های دوجمله‌ای در کاواک اتلافی

فاطمه یدالهی[۱]، رزا صفایی[۲]، محمد مهدی گلشن[۱]
[۱]بخش فیزیک، دانشگاه شیراز، شیراز
[۲] دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه شیراز، شیراز

چکیده – در این مقاله رفتار زمانیِ درهم‌تنیدگی، بین توزیع فوتونیِ "دوجمله"ای و یک اتم دوترازه، درون کاواکی اتلافی که در تعادل گرمایی با محیط در دمای T قرار دارد، مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور معادله‌ی اصلیِ حاکم بر سامانه‌ی اتم-فوتون در تقریب سکولار، برای حالت اولیه‌ای که در آن توزیع فوتونی دوجمله‌ای است، حل می‌شود. سپس با استفاده از ماتریس چگالیِ سامانه که عناصر قطری و غیرقطری آن به‌ترتیب به‌صورت عددی و تحلیلی به‌دست می‌آیند، منفیت به‌صورت عددی محاسبه شده و برای بررسی اثر دما و گذشت زمان بر میزان درهم‌تنیدگیِ اتم-فوتون، مورد استفاده قرار می‌گیرد. نمودارهای منفیت برحسب زمان و دما نشان می‌دهد که با گذشت زمان درهم‌تنیدگی در حالی که نوسان می‌کند، به‌صورت مجانبی به سمت صفر میل می‌کند و هم‌چنین افزایش دما نیز میزان درهم‌تنیدگی را کاهش می‌دهد.

کلید واژه- درهم‌تنیدگیِ اتم-فوتون، کاواک اتلافی، معادله‌ی اصلی، توزیع فوتونی دوجمله‌ای.

Effect of Temperature on the Temporal Behavior of Entanglement between Photonic Binomial Distribution and a Two-Level Atom in a Damping Cavity

Fatemeh Yadollahi[1], Roza Safaiee[2], Mohammad Mehdi Golshan[1]

[1] Physics Department, Shiraz University, Shiraz
[2]Faculty of Advanced Technologies, Shiraz University, Shiraz

Abstract-In the present report, temporal behavior of entanglement between a photonic binomial distribution and a two-level atom in a leaky cavity, in equilibrium with the environment at a temperature T, is studied. In this regard, the master equation is solved in the secular approximation for the density matrix, when the initial photonic distribution is binomial. The atom-photon density matrix so calculated is then used to compute the negativity, as a measure of entanglement. The behavior of entanglement is, consequently, determined as functions of time *and* temperature. Our results, along with representative figures reveal that the atom-photon degree of entanglement exhibits oscillations while decaying with time and asymptotically vanishes. It is further demonstrated that an increase in the temperature results a decrease in the entanglement.

Keywords: atom-photon entanglement, cavity damping, master equation, photonic binomial distribution.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

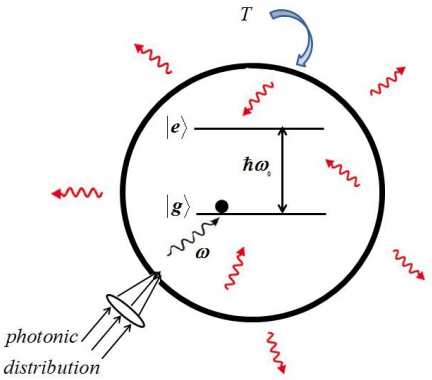
[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]

۱- مقدمه

به‌منظور افزایش سرعت محاسبات کامپیوترهای کلاسیک، ایده‌یِ انجام محاسبات کوانتومی از سال‌ها پیش مورد توجه قرار گرفته است[۱]. حالت‌های درهم‌تنیده نقش اساسی در پردازش و انتقال اطلاعات کوانتومی، نظیر فرابرد کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ... دارند [۲]. بنابراین یافتن سیستم-های فیزیکی که در آن‌ها درهم‌تنیدگی می‌تواند تولید، دستکاری و کنترل شود، توجه زیادی را به خود جلب کرده است [۳]. از آن‌جا که فوتون‌ها حمل‌کننده‌ی سریع و ایده‌آل اطلاعات کوانتومی هستند و اتم‌ها واحدهای قابل اطمینان برای ذخیره‌سازیِ طولانی مدت و پردازش اطلاعات هستند، سامانه‌ی اتم-فوتون گزینه‌ی مناسبی برای ایجاد و کنترل حالت‌های درهم‌تنیده می‌باشد. از طرف دیگر با توجه به آن-که به‌طور معمول برهم‌کنشِ اتم-فوتون در یک کاواک صورت می‌پذیرد و نیز این واقعیت که کاواک‌ها در عمل اتلافی هستند، اثر این اتلاف را بر رفتار درهم‌تنیدگی می‌باید مورد نظر قرار داد [٤و٥]. تاکنون سنجه‌های بسیاری برای محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی معرفی شده است. در این مقاله سنجه‌ی منفیت به منظور بررسی رفتار زمانیِ درهم‌تنیدگی، بین یک اتم دوترازه و توزیعِ فوتونیِ دوجمله‌ای که در یک کاواک اتلافی در تعادل گرمایی با محیط اطرافش در دمای T قرار دارد، به‌کار رفته است. نتیجه‌ی محاسبات ما نشان-دهنده‌ی این است که در یک دمای ثابت، با گذشت زمان میزان درهم‌تنیدگی به‌طور نوسانی کاهش می‌یابد و به‌طور مجانبی به سمت صفر میل می‌کند. هم‌چنین در هر لحظه، با افزایش دما درهم‌تنیدگی از یک مقدار بیشینه شروع به کاهش می‌کند به‌گونه‌ای که در دماهای بزرگ، به‌طور مجانبی به صفر نزدیک می‌گردد.

۲- معادله‌ی اصلی

برهم‌کنش یک میدان تک‌مد با فرکانس ω و یک اتم دوترازه که $|g\rangle$ و $|e\rangle$ به‌ترتیب حالت‌های پایه و برانگیخته-اش را نمایش می‌دهند، در یک کاواک اتلافی در دمای T را درنظر می‌گیریم.



شکل۱: برهم‌کنش یک اتم دوترازه با میدان تک‌مد در کاواک اتلافی در دمای T.

مطابق شکل ۱ چون دیواره‌های کاواک رسانای کامل نیستند، فوتون‌ها به بیرون نفوذ می‌کنند. می‌توان پدیده‌ی اتلاف انرژی در کاواک را بدین‌صورت مدل‌سازی کرد که میدانِ درون کاواک با محیط اطرافش که درجات آزادی بسیار بالایی دارد و باصطلاح منبع گرمایی نامیده می‌شود، برهم‌کنش می‌کند. در این مدل هریک از مدهای تابشیِ منبع به‌صورت یک نوسانگر درنظر گرفته می‌شود که با میدان تبادل انرژی دارد. برای دست‌یابی به معادلات دینامیکیِ اتم-فوتون با وجود اتلاف، باید بر روی درجات آزادیِ منبع گرمایی ردگیری شود. معادله‌ی حاکم بر سامانه-ی اتم-فوتون در حضور میرایی، معادله‌ی اصلی نامیده می-شود که در دمای T در تصویر برهم‌کنش به‌صورت زیر است [٦]:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H_I,\rho] - \frac{\gamma}{2}\bar{n}_{th}(aa^\dagger\rho - 2a^\dagger\rho a + \rho aa^\dagger) - \frac{\gamma}{2}(\bar{n}_{th}+1)(a^\dagger a\rho - 2a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a) \quad (۱)$$

در رابطه‌ی اخیر، $a^\dagger$ و a به‌ترتیب عملگرهای خلق و نابودی میدان هستند و ρ عملگر چگالیِ توصیف کننده‌ی سامانه‌ی اتم-فوتون است. γ ضریب میراییِ میدان کاواک است و در رابطه‌ی $\gamma = \omega/Q$، که در آن Q ضریب کیفیت کاواک است، صدق می‌کند. هم‌چنین H_I هامیلتونیِ برهم‌کنشِ اتم-فوتون در تصویر برهم‌کنش است که چون حالت خاص تشدید $\omega = \omega_0$ را درنظر گرفته‌ایم، برابر است با:

$$H_I = \hbar\lambda\,(a|e\rangle\langle g| + a^\dagger|g\rangle\langle e|) \quad (۲)$$

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]

که در آن λ جفتیدگیِ اتم-فوتون است و $\bar{n}_{th}$ تعداد بوزون‌های گرماییِ منبع توسط رابطه‌ی $\bar{n}_{th}=\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$ داده می‌شود.

۳- درهم‌تنیدگیِ حالت‌های سامانه

در این تحقیق از سنجه‌یِ منفیت برای محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی استفاده می‌شود. مقیاس منفیت به‌ترتیب زیر تعریف می‌شود:

$$E_N=\sum_i \max(0,-\lambda_i) \qquad (۳)$$

در این رابطه λ_i ویژه مقدار ماتریس ρ^{PT} است. اگر مقیاس E_N مثبت شود، سامانه درهم‌تنیده است و جایی که صفر شود، در مورد درهم‌تنیده بودن یا نبودن حالت‌ها نمی‌توان چیزی گفت. در این مقاله فرض می‌کنیم در لحظه‌ی اولیه اتم در تعادل گرمایی با کاواک در دمای T قرار دارد. بنابراین توزیع اتم در حالت‌های پایه و برانگیخته‌اش توسط دما مشخص می‌شود:

$$\rho_A(0)=\frac{e^{\hbar\omega/2kT}}{2\cosh(\hbar\omega/2kT)}|g\rangle\langle g|+\frac{e^{-\hbar\omega/2kT}}{2\cosh(\hbar\omega/2kT)}|e\rangle\langle e| \equiv A|g\rangle\langle g|+B|e\rangle\langle e| \qquad (۴)$$

از طرفی فرض می‌کنیم در لحظه‌ی اولیه یک توزیع فوتونیِ دوجمله‌ای با استفاده از چیدمان آزمایشگاهی که در[۷] ارائه شده است، تولید شده و از طریق یک روزنه‌ی بسیار کوچک به درون کاواک هدایت می‌شود. لازم به توضیح است که بسط حالت دوجمله‌ای برحسب حالت‌های عددی به‌صورت زیر است:

$$|p,M\rangle=\sum_{n=0}^{M}C_n|n\rangle =\sum_{n=0}^{M}\left[\frac{M!}{n!(M-n)!}p^n(1-p)^{M-n}\right]^{\frac{1}{2}}|n\rangle \qquad (۵)$$

به‌طوری که p احتمال خلق هر فوتون و M حداکثر تعداد فوتون‌هایی است که می‌تواند در این توزیع فوتونی وجود داشته باشد. میانگین تعداد فوتون‌ها با رابطه‌ی $\bar{n}=pM$ داده می‌شود. بنابراین در لحظه‌ی صفر حالت سامانه که خالص و جداپذیر می‌باشد، برابر است با:

$$\rho(0)=\rho_A(0)\otimes\rho_F(0) =(A|g\rangle\langle g|+B|e\rangle\langle e|)\otimes|p,M\rangle\langle p,M| \qquad (۶)$$

برای محاسبه‌ی منفیت، ابتدا باید ماتریس $\rho(t)$ را به‌دست آوریم. با تبدیل یکانیِ $W(t)=e^{iH_I t/\hbar}\rho(t)\,e^{-iH_I t/\hbar}$ معادله‌ی (۱) به معادله‌ی ساده‌تری برای $W(t)$ تبدیل می‌شود. با حل معادله‌ی جدید، عناصر ماتریس $W(t)$ را در پایه‌های H_I به‌دست می‌آوریم. در این مرحله از تقریب سکولار استفاده کنیم که در آن به‌دلیل این‌که برهم‌کنش اتم-فوتون بسیار قوی‌تر از اتلاف انرژی در کاواک است ($\lambda \gg \gamma$)، از جملات شدیداً نوسان کننده صرفنظر می‌کنیم[۸]. در نهایت با انجام عکس تبدیل یکانیِ فوق‌الذکر، عناصر غیرقطریِ ماتریس $\rho(t)$ را در پایه‌ی اتم-فوتون به‌صورت کاملاً تحلیلی به ازای $m\neq n$ به‌دست می‌آوریم:

$$\langle g,m+1|\rho(t)|g,n+1\rangle=e^{-\frac{\gamma}{2}t(m+n+1)}e^{-\gamma\bar{n}_{th}t(m+n+2)} (AC_{m+1}C_{n+1}^{*}\cos(\lambda t\sqrt{m+1})\cos(\lambda t\sqrt{n+1}) +BC_mC_n^{*}\sin(\lambda t\sqrt{m+1})\sin(\lambda t\sqrt{n+1})) \qquad (۷)$$

$$\langle g,m+1|\rho(t)|e,n\rangle=i\,e^{-\frac{\gamma}{2}t(m+n+1)}e^{-\gamma\bar{n}_{th}t(m+n+2)} (AC_{m+1}C_{n+1}^{*}\cos(\lambda t\sqrt{m+1})\sin(\lambda t\sqrt{n+1}) -BC_mC_n^{*}\sin(\lambda t\sqrt{m+1})\cos(\lambda t\sqrt{n+1})) \qquad (۸)$$

$$\langle e,m|\rho(t)|e,n\rangle=e^{-\frac{\gamma}{2}t(m+n+1)}e^{-\gamma\bar{n}_{th}t(m+n+2)} (AC_{m+1}C_{n+1}^{*}\sin(\lambda t\sqrt{m+1})\sin(\lambda t\sqrt{n+1}) +BC_mC_n^{*}\cos(\lambda t\sqrt{m+1})\cos(\lambda t\sqrt{n+1})) \qquad (۹)$$

$$\langle g,0|\rho(t)|g,n+1\rangle=e^{-\frac{\gamma}{2}t(n+\frac{1}{2})}e^{-\gamma\bar{n}_{th}t} AC_0C_{n+1}^{*}\cos(\lambda t\sqrt{n+1}) \qquad (۱۰)$$

$$\langle g,0|\rho(t)|e,n\rangle=i\,e^{-\frac{\gamma}{2}t(n+\frac{1}{2})}e^{-\gamma\bar{n}_{th}t} AC_0C_{n+1}^{*}\sin(\lambda t\sqrt{n+1}) \qquad (۱۱)$$

در روابط (۷) تا (۱۱)، $m,n=0,1,2,\ldots$ می‌باشد. برای به‌دست آوردن عناصر قطری ماتریس چگالی می‌بایستی $M+2$ معادله‌ی دیفرانسیل جفت‌شده‌یِ خطیِ مرتبه‌ی اولِ نسبتاً پیچیده، به‌صورت عددی حل شود که به‌دلیل اطاله‌ی کلام، از آوردن جزئیات آن خودداری کرده‌ایم. با داشتن درایه‌های ماتریس چگالی به راحتی می‌توان آن‌را ترانهاده‌ی جزئی نمود. از آن‌جا که ابعاد ماتریس چگالیِ ترانهاده‌ی جزئی بسیار بزرگ است، برای محاسبه‌ی ویژه مقادیر آن باید به روش‌های عددی متوسل شد.

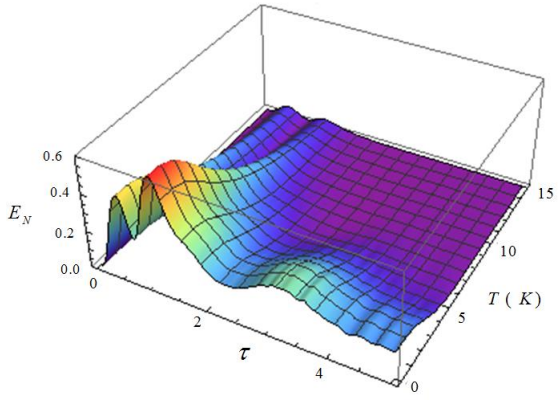
۴- نتایج عددی

به‌منظور بررسی اثر توزیع فوتونیِ اولیه بر درهم‌تنیدگی اتم-فوتون، نمودار سه بعدیِ رفتار منفیت برحسب $\tau=\lambda t$ (زمان بدون بعد) و دما به ازای $\bar{n}=8$ ($p=8/30$) و

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]

$M=30$، $\gamma/\lambda=0.01$ (نسبت میرایی به جفتیدگی) و $\omega=10^{12}$ برای توزیع فوتونیِ دوجمله‌ای، در شکل ۲ رسم شده است.



شکل۲: نمودار سنجه‌یِ منفیت برحسب زمان بدون بعد و دما برای نور دوجمله‌ای، به ازای $\gamma/\lambda=0.01$، $\omega=10^{12}$ و میانگین فوتونیِ اولیه، $\bar{n}=8$.

همان‌طور که انتظار می‌رود در لحظه‌ی اولیه به‌دلیل جداپذیر بودن حالت سامانه، درهم‌تنیدگی صفر است. با گذشت زمان درجه‌ی درهم‌تنیدگی درحالی که نوسان می‌کند ابتدا افزایش یافته و سپس شروع به کاهش می‌کند تا این‌که به‌صورت مجانبی به صفر میل کند. این رفتار زمانیِ درهم‌تنیدگی را می‌توان بدین‌صورت توضیح داد که در اثر برهم‌کنش فوتون‌ها با مدهای کاواک، آنسامبل اتم-فوتون شروع به آمیخته شدن می‌کند و بنابراین در لحظات اولیه‌ی برهم‌کنش اتم با فوتون، درهم‌تنیدگی رو به افزایش می‌رود. با توجه به آنکه بخاطر اتلاف پس از مدتی تعداد حالت‌های فوتونی کاهش می‌یابد، این افزایش در لحظه‌ای متوقف می‌شود. از طرف دیگر، اتم و فوتون در طول برهم‌کنش با یکدیگر تبادل انرژی دارند، درهم‌تنیدگی یک رفتار نوسانی را از خود بروز می‌دهد. به‌دلیل خروج انرژی از کاواک (کاواک اتلافی)، در زمان‌های طولانی، $\tau\gg\lambda/\gamma$، سامانه در حالت پایه‌ی خود ($|g,0\rangle$) که یک حالت جداپذیر است، قرار می‌گیرد. در نتیجه دامنه‌یِ نوساناتِ درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد و به‌طور مجانبی به صفر میل می‌کند. از طرف دیگر در هر لحظه، با افزایش دما درهم‌تنیدگی از یک مقدار بیشینه شروع به کاهش می‌کند به‌گونه‌ای که در دماهای بزرگ، به‌طور مجانبی به صفر نزدیک می‌گردد. زیرا با افزایش دما، $\bar{n}_{th}$ افزایش می‌یابد و این به نوبه‌ی خود منجر به برانگیخته شدن حالت‌های بالاتر فوتونی می‌گردد بنابراین از احتمال حضور در حالت‌های پایین‌تر کاسته شده و به احتمال حضور در حالت‌های بالاتر افزوده می‌شود به‌طوری که احتمال حضور تمامیِ حالت‌های سامانه یکسان می‌گردد. در نتیجه در اثر افزایش دما، درجه‌ی آمیختگیِ آنسامبل سامانه افزایش می‌یابد به‌طوری که در دماهای بزرگ، کاملاً آمیخته می‌گردد درنتیجه درهم‌تنیدگی به صفر میل می‌کند.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله درهم‌تنیدگیِ یک اتم دوترازه با فوتون‌های دوجمله‌ای در یک کاواک اتلافی که در تعادل گرمایی با محیط قرار دارد، برحسب زمان و دما مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج محاسبات ما حاکی از آن است که با گذشت زمان درهم‌تنیدگی در حالی که نوسان می‌کند کاهش می‌یابد و به صفر میل می‌کند. با افزایش دما نیز، درهم‌تنیدگی یک روند کاملاً کاهشی را دنبال می‌کند تا این‌که به‌صورت مجانبی به صفر نزدیک می‌شود.

مراجع

[1] D. Loss, D. P. Divincenzo, "Quantum computation with quantum dots", Phys. Rev. A, Vol. 57, pp. 120-126, 1998.

[2] A. Reiserer, N. Kalb, G. Rempe, S. Ritter, "A quantum gate between a flying optical photon and a single trapped atom", Nature, Vol. 508, pp. 237-240, 2014.

[3] Sh. Alizadeh, R. Safaiee, M. M. Golshan, "Effect of temperature on photon-photon entanglement in a nonlinear nanocavity", Physica A, Vol. 428, pp. 133-139, 2015.

[4] A.-S. F. Obada, H. A. Hessian, A.-B. Mohamed, "effects of cavity damping on the entanglement for a three-level atomic system", J. Mod. Opt., Vol. 56, pp. 881-855, 2009.

[5] V. Ceban, M. A. Macovei, "Cavity quantum interferences with three-level atoms", J. Opt. Soc. Amer. B, Vol.33, pp. 942-946, 2016.

[6] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Plank Equations*, p.16, Springer, 2000.

[7] R. L. Franco, G. Compagno, A. Messina, A. Napoli, "Efficient generation of N-photon binomial states and their use in quantum gates in cavity QED", Phys. Lett. A, Vol. 374, pp. 2235-2242, 2010.

[8] H-P. Breuer, Petruccione, *Irreversible Quantum Dynamics*, p.65, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]