بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

روش تحلیلی جدید به منظور محاسبه نمای لیاپانوف در لیزر Nd:YAG پمپ شده توسط یک لیزر دیودی کوپل شده با یک نوسان‌سازآشوبناک

علیرضـــا قمـــی طاهـــری، محمـد هـژیر مظفـــــری

گـروه مهندســی بـرق، واحد سنندج، دانشگاه آزاد اسلامی، سنندج، ایران

چکیده –در این مقاله یک روش تحلیلی جدید به منظور محاسبه نمای لیاپانوف مبتنی بر روش تبدیل دیفرانسیلی (*DTM*) در یک نمونه آزمایشی از لیزر *Nd:YAG* پمپ شده توسط یک لیزر دیودی کوپل شده با یک نوسان‌ساز راسلر (*Rossler*) آشوبناک ارائه شده است. سپس تغییرات نمای لیاپانوف به ازای پارامترهای مختلف سیستم نشان داده شده است. تاکنون محاسبه نمای لیاپانوف و تغییرات آن نسبت پارامترهای مختلف سیستم براساس این روش و بصورت تحلیلی انجام نپذیرفته است.

کلید واژه- آشوبناک، روش تبدیل دیفرانسیلی، لیزر *Nd:YAG* پمپ شده توسط یک لیزر دیودی ، نمای لیاپانوف، نوسان‌ساز راسلر.

Novel Analytic Method for Calculation of Lyapunov Exponent in a Diode-Laser-Pumped Nd:YAG Laser Coupled with a Chaotic Oscillator

Alireza Ghomi Taheri , Mohammad Hazhir Mozaffari

Department of Electrical Engineering, Sanandaj Branch, Islamic Azad University, Sanandaj, Iran.

Abstract- This paper proposed a new analytic method to calculate the Lyapunov exponent based on the Differential Transform Method (DTM) in the diode-laser-pumped Nd:YAG laser coupled with a chaotic Rossler oscillator. In this paper the variations of the Lyapunov exponents is figured regarding unknown parameters using DTM. So far, the system calculates Lyapunov exponent and changes of various parameters on the basis of the analytical method is not performed.

Keywords: Chaotic Oscillator, Diode-Laser-Pumped Nd:YAG Laser, Differential Transform Method (DTM), Lyapunov Exponent.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-14]

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

۱- مقدمه

یکی از انواع رفتار پیچیده در سیستم های غیرخطی، رفتار آشوب آن می باشد. آشوب بطور گسترده در علوم مهندسی و سیستم های طبیعی کاربرد پیدا کرده است. هدف نظریه آشوب شناسایی راه های تشخیص نظم نهفته در سیستم های بسیار پیچیده است که در صورت موفقیت اجازه می دهند تا روند آتی حرکت آنها برخلاف باورهای قبلی پیش بینی شود[۳-۱]. نکته اصلی تئوری آشوب این است که در هر بی نظمی، نظمی نهفته است به این معنا که نباید نظم را تنها در یک مقیاس جستجو کرد [۲]. در واقع رفتار آشوب یک سیستم غیرخطی بسیار حساس به شرایط اولیه می باشد، بطوری که تغییر کوچکی در شرایط اولیه تغییرات بسیار زیادی در خروجی خواهد داشت[۴]. یکی از روش هایی که آشوب یک سیستم غیرخطی را بررسی می کند، نمای لیاپانوف سیستم است[۲]. لیزر Nd:YAG پمپ شده توسط یک لیزر دیودی کوپل شده با نوسان‌ساز راسلر (Rossler)، تا کنون بررسی برای سنکرون سازی بین سیستم ها بوده و بصورت تحلیلی به منظور بررسی آشوبناکی و پایداری آن مطالعه نشده است. نوسان‌ساز راسلر دارای رفتاری شبیه به سیستم لورنز می باشد اما در تجزیه و تحلیل نسبت به آن ساده‌تر است [۶و۵].

۲- مروری بر روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM)

اگر یک سیستم کلی به صورت عبارت ۱ باشد:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})) \qquad (۱)$$

در این سیستم $f(x(t))$ می تواند یک عبارت خطی یا غیرخطی باشد و از طرفی $Ax(t)$ یک عبارت خطی می باشد. $X(k)$ تبدیل دیفرانسیلی برای $x(t)$ و $F(k)$ تبدیل دیفرانسیلی برای $f(x(t))$ می باشد که عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} x(t) & \rightarrow & X(k) \\ f(x(t)) & \rightarrow & F(k) \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

در این عبارات $x(t)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

در این مقاله، ما برای محاسبه از الگوریتمی طبق روش DTM، استفاده می‌کنیم. این روش دارای ویژگی‌هایی می‌باشد که در جدول (۱) بیان شده است[۸و۷].

با توجه به جدول (۱) ، رابطه (۱) بصورت زیر بیان می شود:

$$(k+1)\,X(k+1) = AX(k) + F(k) \qquad (۴)$$

جدول ۱: عملیات تابع تبدیل در روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM)

تابع تبدیل	تابع اصلی
$X(k) = AX_1(k)$	$x(t) = Ax_1(t)$
$(k+1)X(k+1)$	$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$
$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!}F_1(k+n)$	$f(x(t)) = \frac{d^n f_n(x(t))}{dt^n}$
$F(k) = F_1(k) \pm F_2(k)$	$f(x(t)) = f_1(x(t)) \pm f_2(x(t)$
$F(k) = \sum_{k_1=0}^{k} F_1(k_1)F_2(k-k_1)$	$f(x(t)) = f_1(x(t))\,f_2(x(t))$
$F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$	$f(x(t)) = e^{\lambda t}$
$F(k) = \frac{\omega^k}{k!}\cos\left(\frac{k\pi}{2}+\alpha\right)$	$f(x(t)) = \cos(\omega t + \alpha)$

برای تحلیل سیستم توسط این روش، باید عبارت کلی سیستم را تا n جمله بسط داد. در نهایت با استفاده از این الگوریتم، بسط تیلور $x(t)$ به شکل زیر بدست می آید:

$$x(t) = X(0) + X(1).t + \cdots + X(n).t^{(n)} \qquad (۵)$$

در این پژوهش با استفاده از بسط فوق، روشی تحلیلی برای محاسبات ارائه شده است.

۳- نمای لیاپانوف مبتنی بر روش DTM

با استفاده از تعریف نمای لیاپانوف داریم [۴]:

$$\lambda = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{n} Ln\frac{\left\|x(t+1)-x(t)\right\|}{\left\|x(t)-x(t-1)\right\|} \qquad (۶)$$

که در عبارت فوق، N طول سری زمانی می باشد. در این مقاله، نمای لیاپانوف و آنالیز حساسیت آن نسبت به پارامترها با استفاده از روش DTM بصورت تحلیلی محاسبه می شوند که عبارتند از:

$$\lambda = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} Ln\frac{\left\|X(k+1)-X(k)\right\|}{\left\|X(k)-X(k-1)\right\|} \qquad (۷)$$

که $X(0)$ شرایط اولیه و λ نمای لیاپانوف را بیان می کنند.

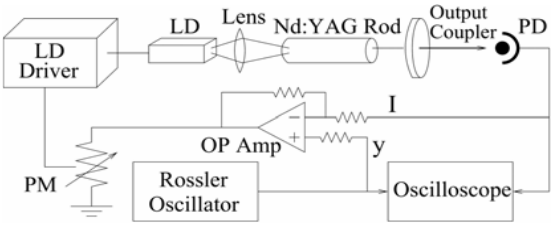
۴- تحلیل آشوب لیزر Nd:YAG پمپ شده توسط یک لیزر دیودی کوپل شده با نوسان‌ساز راسلر

شکل (۱) نمونه آزمایشی از بلوک دیاگرام لیزر Nd:YAG پمپ شده توسط یک لیزر دیودی کوپل شده با نوسان‌ساز راسلر را نشان میدهد. در این سیستم LD ، PD و PM به ترتیب نشان دهنده لیزر دیودی، آشکارساز پین دیود (Si_PIN photo diode) و پتانسومتر هستند. میله استوانه ای لیزر Nd:YAG دارای اندازه به طول ۵-mm و قطر ۳-nm می باشد که با یک لیزر دیودی ۸۰۸-nm پمپ شده است. خروجی لیزر توسط پین دیود اندازه گیری می شود و برای حصول اطمینان توسط اسیلوسکوپ دیجیتالی ذخیره سازی می شود. دامنه سیگنال لیزر از PD و

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-14]

سیگنال Y از اسیلاتور راسلر بطور همسان باهم در نظر گرفته می شود که بعد از حذف اجزاء DC برای بدست آوردن $\varepsilon(Y_I)$ وارد تقویت کننده عملیاتی می شود. در نهایت بعد از محاسبه (Y_I) و ε که قدرت کوپل می باشد، آن را توسط پتانسیومتر با اندازه گام ۰/۵ درصد کنترل می کند.



شکل ۱: شماتیک بلوک دیاگرام لیزر Nd:YAG پمپ شده توسط یک لیزر دیودی کوپل شده با نوسان ساز راسلر [۶]

این سیستم دارای معادلات دیفرانسیلی به شرح زیر می باشد که شامل چهار پارامتر کنترلی a ، b ، c و w است و w فرکانس مرکزی سیستم می باشد[۶] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -wy(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + ay(t) \\ \dot{z}(t) = b + z(t)(x(t) - c) \end{cases} \quad (۸)$$

حال معادلات سیستم را با استفاده از روش DTM پیاده سازی می نماییم که به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} (k+1)X(k+1) = -w \cdot Y(k) - Z(k) \\ (k+1)Y(k+1) = X(k) + a \cdot Y(k) \\ (k+1)Z(k+1) = b - Z(k) \cdot c + \sum_{k_1=0}^{k} X(k_1) \cdot Z(k-k_1) \\ where\ \{k=n=0 \cdots 14\} \end{cases} \quad (۹)$$

سپس با استفاده از معادلات فوق، به ترتیب ابتدا محاسبه نمای-لیاپانوف و سپس آنالیز حساسیت آن را بررسی می کنیم.

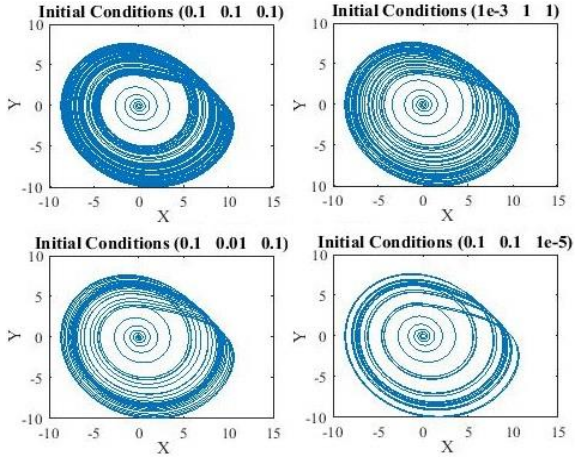
۴-۱- محاسبه نمای لیاپانوف

طبق روابط (۷) و (۹) با جایگزینی عبارات سیستم تا n جمله در بسط تیلور، نمای لیاپانوف سیستم محاسبه می شود. جدول (۲) نماهای لیاپانوف لیزر Nd:YAG پمپ شده توسط یک لیزر دیودی کوپل شده با نوسان‌ساز راسلر تحت شرایط اولیه مختلف را نشان می دهد. همانطور که در جدول (۲) مشاهده می شود، کوچک‌ترین تغییرات در شرایط اولیه، باعث بروز تغییرات در نماهای لیاپانوف سیستم می شود. در شرایط اولیه برابر با (0.1, 0.1, 1e-5) سیستم به سمت پایداری میل کرده است.

به منظور وضوح بیشتر مطالب در این مقاله، نتایج شبیه سازی بیان شده است. شکل (۲) منحنی فاز سیستم آشوبناک را در شرایط اولیه مختلف نشان می دهد. سیستم های آشوبناک نسبت به شرایط اولیه بسیار حساس هستند؛ همانطور که در این شکل مشاهده می شود با تغییر شرایط اولیه رفتار سیستم تغییر می کند.

جدول ۲: محاسبه نماهای لیاپانوف سیستم در شرایط اوایه مختلف برای مقادیر پارامترهای $a = 0.15,\ b = 0.2,\ c = 5.7,\ w = 37\,kHz$

λ_3	λ_2	λ_1	شرایط اولیه
0.062	-0.029	-0.061	(0.1 0.1 0.1)
0.051	-0.162	-0.042	(1e-3 0.1 0.1)
0.067	-0.157	-0.031	(0.1 1e-2 0.1)
-0.041	-0.264	-0.231	(0.1 0.1 1e-5)



شکل ۲: منحنی فاز سیستم تحت شرایط اولیه مختلف

۴-۲- آنالیز حساسیت نمای لیاپانوف نسبت به پارامترها

برای بررسی حساسیت نمای لیاپانوف نسبت به پارامترهای مختلف سیستم، باید با استفاده از رابطه (۹)، بسط تیلور برای متغیرهای حالت سیستم محاسبه نماییم. پس داریم:

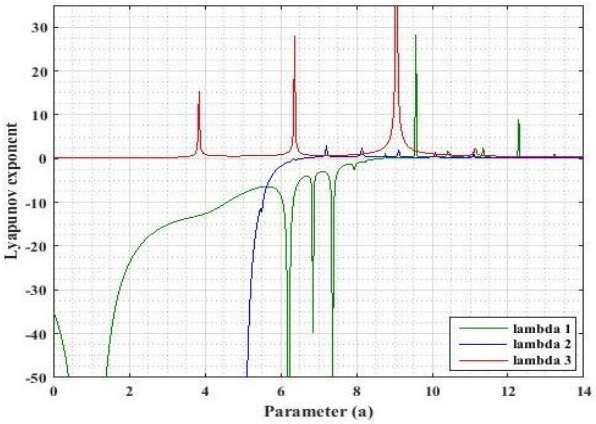
$$\begin{cases} x(t) = X(0) + X(1) \cdot t + \cdots + X(n) \cdot t^n \\ y(t) = Y(0) + Y(1) \cdot t + \cdots + Y(n) \cdot t^n \\ z(t) = Z(0) + Z(1) \cdot t + \cdots + Z(n) \cdot t^n \end{cases} \quad (۱۰)$$

سپس بسط بدست آمده را در رابطه (۷) جایگزین می کنیم.

ا شکال ۳ تا ۶، تغییرات نمای لیاپانوف لیزر Nd:YAG پمپ شده تو سط یک لیزر دیودی کوپل شده با نو سان ساز را سلر برا ساس تغییرات پارامترهای مختلف سیستم، توسط نرم افزار MATLAB را نشان می‌دهد. هدف از این شبیه سازی، بررسی تأثیر پارامترها در رفتار آشوبگونه سیستم است. شکل (۳) نمودار تغییرات نمای-لیاپانوف نسبت به تغییرات پارامتر a وقتی $b = 0.2,\ c = 5.7,\ w = 37\,kHz$ را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود به ازای برخی مقادیر a سیستم پایدار می‌باشد چون تمامی نماهای لیاپانوف منفی می‌شوند و به ازای برخی مقادیر به علت مثبت شدن حداقل یکی از نماهای لیاپانوف سیستم آشوبناک می‌شود. بعنوان مثال در بازه $a \in [10 \rightarrow 14]$ تمامی مقادیر نماهای لیاپانوف مثبت می شوند.

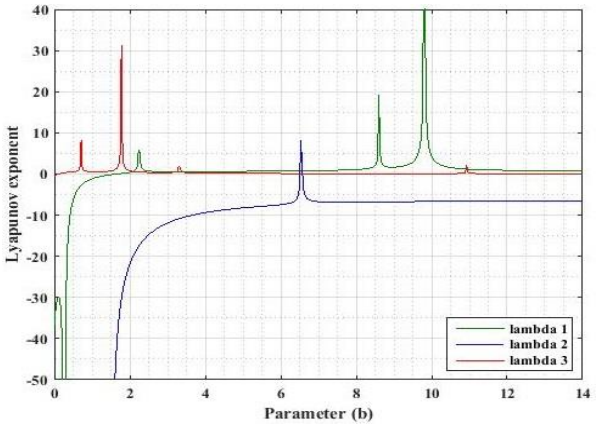
این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-14]



شکل ۳: نمودار تغییرات نمای لیاپانوف نسبت به پارامتر a

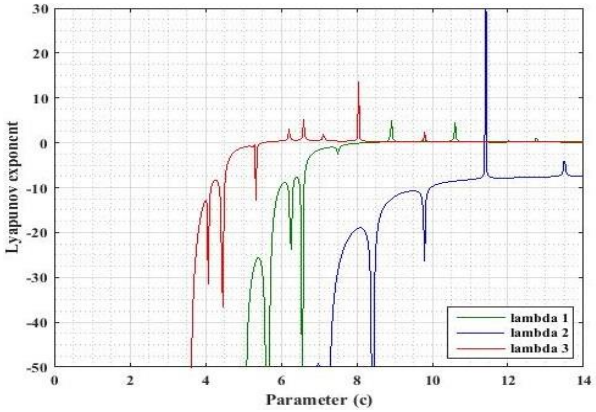
شکل (۴) نشان دهنده تغییرات نمای لیاپانوف به ازای تغییرات مختلف پارامتر b وقتی $a = 0.15, c = 5.7, w = 37kHz$ می‌باشند. همانطور که مشاهده می‌شود به ازای تغییرات $b \in [0 \to 0.5]$ کلیه مقادیر نماهای لیاپانوف منفی می‌باشند و نشان دهنده پایداری سیستم می باشد و به ازای $b \in [0.5 \to 14]$ نمای لیاپانوف λ_3 مثبت بوده و مثبت شدن حداقل یکی از مقادیر نمای لیاپانوف نشان دهنده آشوبناک بودن سیستم می باشد.



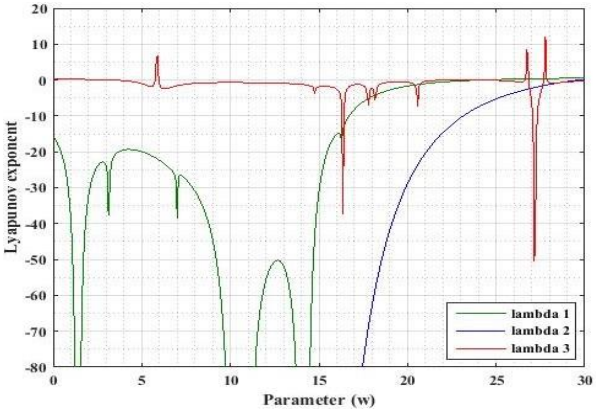
شکل ۴: نمودار تغییرات نمای لیاپانوف نسبت به پارامتر b

شکل(۵) تغییرات نمای لیاپانوف را به ازای تغییرات $c \in [0 \to 14]$ و $a = 0.15, b = 0.2, w = 37kHz$ نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود به ازای تغییرات $c \in [0 \to 6]$ کلیه مقادیر نماهای لیاپانوف منفی بوده و نشان دهنده پایداری سیستم می باشد و به ازای $c \in [6 \to 14]$ نمای لیاپانوف λ_3 مثبت بوده و نشان دهنده آشوبناک بودن سیستم است.

شکل(۶) تغییرات نمای لیاپانوف به ازای تغییرات $w \in [0 \to 14]$ و $a = 0.15, b = 0.2, c = 5.7$ را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود به ازای تغیرات $w \in [0 \to 5]$ کلیه مقادیر نماهای لیاپانوف منفی می‌باشند و نشان دهنده پایداری سیستم است و به ازای برخی نقاط مانند $w = 5.8$ نمای لیاپانوف λ_3 مثبت بوده و نشان دهنده آشوبناک بودن سیستم است.



شکل ۵: نمودار تغییرات نمای لیاپانوف نسبت به پارامتر c



شکل ۶: نمودار تغییرات نمای لیاپانوف نسبت به پارامتر w

۵- نتیجه گیری

با توجه به اینکه تا کنون روش تحلیلی برای محاسبه نمای لیاپانوف ارائه نشده است. در این مقاله برای اولین بار یک روش تحلیلی به منظور آنالیز و محاسبه نمای لیاپانوف لیزر Nd:YAG پمپ شده توسط یک لیزر دیودی کوپل شده با نوسان‌ساز راسلر مبتنی بر روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM) بر حسب پارامترهای مختلف سیستم برای بررسی آشوبناک بودن و پایداری سیستم به ازای تغییرات مختلف پارامترها ارائه شده است.

مراجع

[1] S.H. Strongatz, *Nonlinear dynamics and chaos*, p. 348-394, Perseus Books Publishing L.L.C, 1st ed, 1994.

[2] R.C. Hilborn, *Chaos and nonlinear dynamics*, p. 117-156, Oxford University Press, USA, 2nd ed, 2000.

[3] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, Determining Lyapunov exponent from a time-series. North-Holland Physics Publishing Division. Amsterdam, pp. 285-317, 1985.

[4] M. Sandri, "Numerical calculation of Lyapunov exponent", The Mathematica Journal., pp. 78-84, 1996.

[5] C. Metayer, A. Serres, E. Rosero W. Barbosa, "Extreme events in chaotic lasers with modulated parameter", Optics Express, Vol. 22, pp. 38-47, 2014.

[6] D. Lee, G. Kim, U. Kang, C. Kim, "Phase Synchronization in a Diode-laser-pumped Nd:YAG Laser Coupled with a Chaotic Oscillator", Journal of .K.P.S, Vol. 60, No.3, pp. 322-326, 2012.

[7] F. Mirzaee, "DTM method for solving linear and nonlinear systems", App.M.Sciences., Vol. 70, pp. 3465-3472, 2011.

[8] A. Arikoglu, I. Ozkol, " Solution equations by using DTM". Appl. Math. Comput., Vol. 68, pp. 1145–1158, 2005.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-14]