بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

مقایسه کسر کاملا درهم‌تنیده و ناهم‌خوانی کوانتومی در آماده‌سازی حالت از راه دور

نیره صابریان، سید جواد اخترشناس

گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

چکیده – کسر کاملا درهم‌تنیده می‌تواند میزان مفید بودن یک حالت $d \times d$ مفروض برای ارسال یک حالت dبعدی ناشناخته با استفاده از فرآیند فرابرد کوانتومی را تعیین نماید. حال با توجه به اینکه پروتکل آماده‌سازی حالت از راه دور شبیه فرابرد کوانتومی است، سوالی که مطرح می‌گردد این است که آیا کسر کاملا درهم‌تنیده را می‌توان به‌عنوان منبعی برای آماده‌سازی حالت شناخته شده از راه دور درنظر گرفت؟ در این مقاله به بررسی این پرسش پرداخته و نشان داده می‌شود که با وجود اینکه رفتار هر دو کمیت کسر کاملا درهم‌تنیده و ناهم‌خوانی کوانتومی با شباهت آماده‌سازی حالت از راه دور، در برخی حالت‌ها، کاملا سازگار است؛ این ویژگی در حالت کلی برقرار نیست، بلکه حالت‌هایی نیز وجود دارند که کسر کاملا درهم‌تنیده رفتار سازگارتری با شباهت پروتکل، نسبت به ناهم‌خوانی کوانتومی نشان می‌دهد.

کلید واژه- آماده‌سازی حالت از راه دور، کسر کاملا درهم‌تنیده، ناهم‌خوانی کوانتومی.

.

The Comparison between Fully Entangled Fraction and Quantum Discord in Remote State Preparation

Nayere Saberian, Seyed Javad Akhtarshenas

Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad

Abstract- The fully entangled fraction can be used to characterize whether a quantum state in a $d \times d$ system can be used to teleport an unknown d -dimensional quantum state faithfully. Regarding the similarity of remote state preparation and quantum teleportation, a natural question is: Whether fully entangled fraction can be used as a resource for remote preparation of a known state? In this paper, we address this question and show that although both fully entangled fraction and quantum discord have similar behavior with respect to the fidelity of remote state preparation, it is not the case in general. Moreover, we show that there exist states for which fully entangled fraction have better behavior with respect to the quantum discord.

Keywords: Fully Entangled Fraction, Quantum Discord, Remote State Preparation.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-05]

۱- مقدمه

یکی از اهداف اصلی نظریه اطلاعات کوانتومی، یافتن منابع لازم و کافی برای انتقال حالت‌های کوانتومی است. آماده‌سازی حالت از راه دور (Remote State Preparation) –به اختصار RSP- یکی از راه‌های انتقال این حالت‌ها می‌باشد که از آن با نام فرابرد کوانتومی (Quantum Teleportation) یک حالت شناخته شده یاد می‌کنند [1]. زیرا در این پروتکل حالتی که قرار است آماده‌سازی شود، برخلاف حالت ارسالی در فرابرد کوانتومی، برای فرستنده کاملا شناخته شده می‌باشد. از آنجا که هم‌بستگی کوانتومی نقش مهمی در انتقال بهینه این حالت‌های کوانتومی دارد؛ بررسی آن در این پروتکل حائز اهمیت است.

داکیک و همکارانش در مقاله [4] نشان داده‌اند که ناهم‌خوانی کوانتومی (Quantum Discord) [2,3] منبعی ضروری برای پروتکل RSP است. هم‌چنین در همان مقاله به‌طور واضح نشان داده‌اند که ناهم‌خوانی کوانتومی هندسی [8,9] با شباهت (Fidelity) این پروتکل مرتبط است و به‌این‌ترتیب تعبیری فیزیکی برای ناهم‌خوانی کوانتومی هندسی ارائه کرده‌اند. حال باتوجه به اینکه کسر کاملا درهم‌تنیده (Fully Entangled Fraction) –به اختصار FEF- می‌تواند تعیین کند که به چه میزان یک حالت $d\times d$ مفروض برای ارسال یک حالت dبعدی با استفاده از فرآیند فرابرد کوانتومی مناسب است [5]، سوالی که مطرح می‌گردد این است که آیا FEF را می‌توان به‌عنوان منبعی برای RSP درنظر گرفت؟

مقایسه شباهت RSP معرفی شده در مقاله داکیک [4] با FEF می‌تواند ما را در پاسخ به این پرسش یاری نماید. بنابراین در ابتدا مروری بر پروتکل آماده‌سازی حالت از راه دور خواهیم داشت. سپس به‌طور مختصر درباره مقاله داکیک توضیح داده می‌شود و مفهوم شباهت RSP بیان می‌گردد. پس از آن کمیت FEF معرفی می‌گردد و در پایان با رسم چند نمودار به مقایسه ناهم‌خوانی کوانتومی، شباهت RSP و FEF می‌پردازیم.

۲- آماده‌سازی حالت از راه دور

نمایش یک حالت دوکیوبیتی کلی را برحسب ماتریس‌های پائولی $\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ در نظر می‌گیریم:

$$\rho=\frac{1}{4}[I\otimes I+\sum_{k=1}^{3}x_k\sigma_k\otimes I+\sum_{l=1}^{3}y_l I\otimes\sigma_l+\sum_{k,l=1}^{3}T_{kl}\sigma_k\otimes\sigma_l], \quad (۱)$$

به‌طوری‌که در آن $T_{kl}=Tr[(\sigma_k\otimes\sigma_l)\rho]$ عناصر تانسور هم‌بستگی T می‌باشند، بردار $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ با مؤلفه‌های $x_k=Tr[\sigma_k\rho_A]$، بردار بلاخ ماتریس چگالی کاهش‌یافته آلیس، یعنی ρ_A است و $\vec{y}$ نیز به‌صورت مشابه برای باب تعریف می‌شود.

در این پروتکل، هدف این است که آلیس حالتی شناخته شده را از راه دور برای باب آماده‌سازی نماید. ابتدا فرض می‌کنیم آلیس و باب در جهت $\hat{\beta}$ توافق دارند و آلیس از حالت عمومی ρ (معادله (۱)) که با باب به اشتراک گذاشته است برای آماده‌سازی حالتی خالص با بردار بلاخ $\hat{s}$ استفاده می‌کند؛ که $\hat{s}$ برداری در صفحه عمود بر جهت $\hat{\beta}$ می‌باشد. او آماده‌سازی حالت برای باب را با انجام یک اندازه‌گیری محلی در جهت $\hat{\alpha}$ آغاز می‌کند. آلیس خروجی اندازه‌گیری خود را $(\alpha=\pm1)$ به عنوان یک بیت اطلاعات کلاسیک (1 cbit)، به باب ارسال می‌نماید. به ازای نتیجه $\alpha=-1$ باب دوران π حول محور $\hat{\beta}$ اعمال می‌کند، درحالی‌که برای نتیجه $\alpha=1$ هیچ تغییری نیاز ندارد.

حالتی که در این مرحله در اختیار باب قرار دارد با بردار بلاخ $\vec{r}$ نشان داده می‌شود. در مقاله [4] بازده این پروتکل به‌صورت زیر محاسبه شده است:

$$F\equiv\min_{\hat{\beta}}\langle P_{opt}\rangle=\frac{1}{2}(T_2^2+T_3^2). \quad (۲)$$

در این عبارت T_2^2 و T_3^2 کوچکترین ویژه‌مقادیر TT^t هستند و t نماد ترانهاده است.

در [4] نشان داده می‌شود که برای کلاس خاصی از حالت‌ها که بردار بلاخ آلیس موازی با ویژه‌بردار متناظر با بزرگترین ویژه‌مقدار تانسور هم‌بستگی TT^t می‌باشد، ناهم‌خوانی کوانتومی هندسی نیز مانند شباهت RSP به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$G_D=\frac{1}{2}(T_2^2+T_3^2). \quad (۳)$$

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-05]

بدین ترتیب تعبیری فیزیکی برای ناهم‌خوانی کوانتومی هندسی ارائه شده است.

۳- کسر کاملا درهم‌تنیده

کسر کاملا درهم‌تنیده که آن را با $f(\rho)$ نشان می‌دهیم، برای هر حالت کوانتومی دلخواه ρ در یک سامانه $d\times d$، به‌صورت بیشینه هم‌پوشانی ρ و حالت‌های خالص $|e\rangle$ با درهم‌تنیدگی بیشینه، تعریف می‌گردد [6]:

$$f(\rho)=\max_{|e\rangle}\langle e|\rho|e\rangle. \qquad (۴)$$

عبارت فوق میزان نزدیکی حالت موردنظر به حالت بیشینه درهم‌تنیده را می‌سنجد. این کمیت می‌تواند مقادیر بین $\frac{1}{4}$ و 1 را داشته باشد که به ترتیب برای حالت کاملا آمیخته و حالت بیشینه درهم‌تنیده حاصل می‌شود.

بنت و همکارانش در [6] به سادگی این کمیت را برای سامانه‌های دوکیوبیتی محاسبه می‌کنند. با استفاده از همین روش محاسبه می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد.

۴- مقایسه کسر کاملا درهم‌تنیده و شباهت RSP

همان‌گونه که در مقاله [7] ذکر شده است، همواره می‌توان چارچوب مرجعی یافت که در آن ماتریس هم‌بستگی T قطری باشد:

$$T=[T_1,T_2,T_3]; \quad |T_1|\geq|T_2|\geq|T_3|. \qquad (۵)$$

بنابراین می‌توان یک حالت بل-قطری را به‌صورت زیر نوشت:

$$\rho_{BD}=\frac{1}{4}[I\otimes I+\sum_{i=1}^{3}T_i\,\sigma_i\otimes\sigma_i]. \qquad (۶)$$

این حالت در پایه جادویی $|e_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$, $|e_2\rangle=\frac{i}{\sqrt{2}}(|00\rangle-|11\rangle), |e_3\rangle=\frac{i}{\sqrt{2}}(|01\rangle+|10\rangle)$, $|e_4\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle)$ [6]، با ویژه‌مقادیر زیر قطری است:

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{1}{4}(1+T_1-T_2+T_3),\\ \lambda_2&=\frac{1}{4}(1-T_1+T_2+T_3),\\ \lambda_3&=\frac{1}{4}(1+T_1+T_2-T_3),\\ \lambda_4&=\frac{1}{4}(1-T_1-T_2-T_3).\end{aligned} \qquad (۷)$$

با محاسبه می‌توان نشان داد که کسر کاملا درهم‌تنیده حالت ρ_{BD}، ویژه‌مقدار بیشینه است:

$$f(\rho)=\max\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}. \qquad (۸)$$

شباهت RSP نیز برای این حالت از رابطه (۲) به‌دست می‌آید. باتوجه به مقالات [3,4]، ناهم‌خوانی کوانتومی برای حالت‌های بل-قطری چهاربعدی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}D(\rho_{BD})=&1+\lambda_1\log_2\lambda_1+\lambda_2\log_2\lambda_2+\lambda_3\log_2\lambda_3\\&+\lambda_4\log_2\lambda_4-\frac{1-T_{\max}}{2}\log_2\frac{1-T_{\max}}{2}\\&-\frac{1+T_{\max}}{2}\log_2\frac{1+T_{\max}}{2},\end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن $T_{\max}=\max\{T_1,T_2,T_3\}$.

نمودارهایی که در ادامه می‌آیند سه کمیت ناهم‌خوانی کوانتومی، ناهم‌خوانی کوانتومی هندسی یا شباهت RSP و کسر کاملا درهم‌تنیده را برای چند حالت مختلف این کلاس نشان می‌دهند.

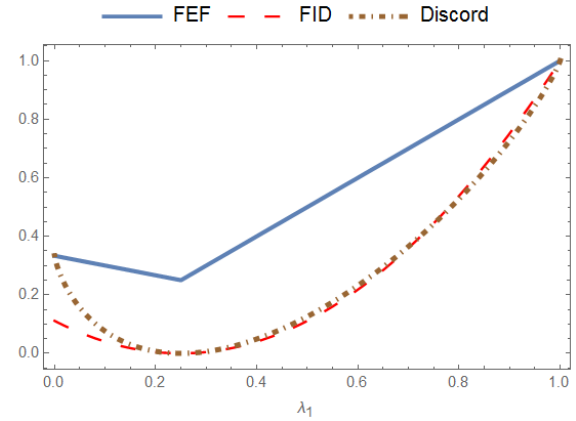
۵- بحث و نتیجه‌گیری

به عنوان اولین مثال نمودار شکل ۱ را درنظر می‌گیریم که در آن کسر کاملا درهم‌تنیده، شباهت RSP یا ناهم‌خوانی کوانتومی هندسی و ناهم‌خوانی کوانتومی برای حالت بل-قطری به ازای مقادیری که در زیر نمودار آمده است رسم شده است.

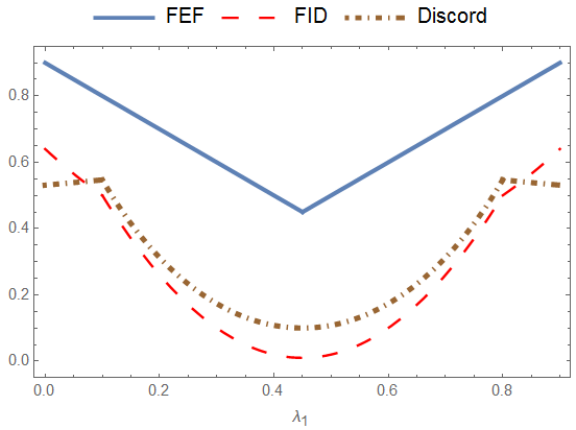
همان‌طور که مشاهده می‌شود در این حالت، هر سه تابع رفتار یکسانی دارند. به‌طوری‌که در $\lambda_1=0.25$ کمینه می‌شوند.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-05]

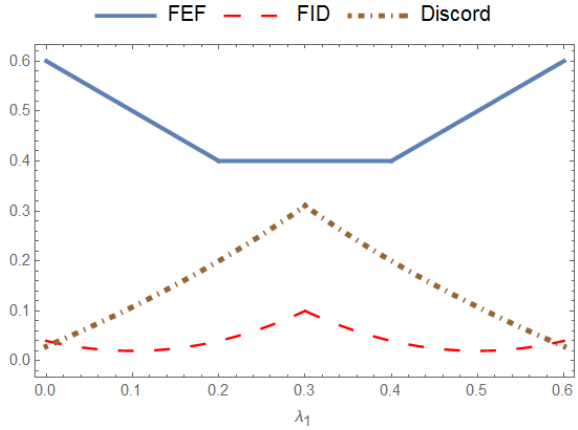


شکل ۱: نمودار سه کمیت کسر کاملا درهم‌تنیده، شباهت RSP و ناهم‌خوانی کوانتومی، برحسب λ_1 به ازای $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=\frac{1-\lambda_1}{3}$.



شکل ۲: نمودار کمیت‌ها برحسب λ_1 به ازای $\lambda_4=0$ ، $\lambda_3=0.1$ و $\lambda_2=1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_4$.

در شکل ۲ نیز مشاهده می‌گردد که FEF و شباهت RSP رفتار سازگاری دارند، درحالی‌که ناهم‌خوانی کوانتومی در ابتدا و انتهای بازه رفتار متفاوتی نشان می‌دهد. اما همان‌طور که شکل ۳ نشان می‌دهد، این سازگاری برای FEF در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. اما باز هم به ازای $\lambda_1\geq 0.5$ و $\lambda_1\leq 0.1$ که نشان‌دهنده حالت‌های بل-قطری درهم‌تنیده می‌باشند رفتار FEF و FID یکسان است.



شکل ۳: نمودار کمیت‌ها برحسب λ_1 به ازای $\lambda_4=0$ ، $\lambda_3=0.4$ و $\lambda_2=1-\lambda_1-\lambda_3-\lambda_4$.

علاوه بر عملکرد مناسب FEF برای این کلاس از حالت‌ها، می‌توان مشاهده کرد که مقدار آن برای حالتی که ناهم‌خوانی کوانتومی آن به‌صورت محلی ایجاد شده است و شباهت RSP غیرصفر دارد -که توسط جیورجی در مقاله [10] معرفی گردیده است- بیشتر از حالتی است که ناهم‌خوانی آن به‌صورت غیرمحلی ایجاد شده است اما بازده پروتکل RSP برای آن صفر است. هم‌چنین محاسبه این کمیت برای حالت جداپذیر و درهم‌تنیده ذکر شده در [4] مفید بودن حالت جداپذیر برای این پروتکل را تایید می‌نماید.

مراجع

[1] C. H. Bennett, P. Hayden, D. W. Leung, P. W. Shor, and A. Winter, "Remote preparation of quantum states," IEEE Trans. Inf. Theory 51, 56-74, 2005.

[2] L. Henderson and V. Vedral, "Classical, quantum and total correlation," J. Phys. A: Math. Gen. 34, 6899-6905, 2001.

[3] H. Ollivier and W. H. Zurek, "Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations," Phys. Rev. Lett. 88, 017901, 2001.

[4] B. Dakic, Y. O. Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T.Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, C. Brukner, and P. Walther, "Quantum discord as resource for remote state preparation," Nature. Phys. 8, 666-670, 2012.

[5] M.-J. Zhao, "Maximally entangled states and fully entangled fraction," Phys. Rev. A 91, 012310, 2015.

[6] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. Smolin, and W. K.Wootters, "Mixed-state entanglement and quantum error correction," Phys. Rev. A 54, 3824, 1996.

[7] R. Horodecki and M. Horodecki, "Information-theoretic aspects of inseparability of mixed states," Phys. Rev. A 54, 1838–1843, 1996.

[8] B. Dakic, V. Vedral, and _ C. Brukner, "Necessary and sufficient condition for nonzero quantum discord," Phys. Rev. Lett. 105, 190502-190506, 2010.

[9] S. Luo and S. Fu, "Geometric measure of quantum discord," Phys. Rev. A 82, 034302, 2010.

[10] G. L. Giorgi, "Quantum discord and remote state preparation," Phys. Rev. A 88, 022315, 2013.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-01-05]