بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۴-۱۲ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر روی سطح یک کره

زهرا هیبتی گوجانی[۱]، علی مهدیفر[۱و۲] و احسان عموقربان[۱و۲]

[۱]گروه فیزیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

[۲]گروه پژوهشی فوتونیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد

چکیده – در این مقاله ابتدا نحوه بدست آوردن طیف انرژی یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی روی سطح کره را مطالعه می‌کنیم. سپس با استفاده از روش گازیو- کلاودر برای طیف گسسته انرژی، حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر را روی سطح کره به دست می‌آوریم. در ادامه، برخی از ویژگی‌های اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس مزبور را بررسی می‌کنیم.

کلید واژه- حالت های همدوس گازیو-کلاودر، نوسانگر هماهنگ دو بعدی روی سطح کره

Gazeau- Klouder Coherent states on a sphere

Z. Heibati Gojani[1], A. Mahdifar[1, 2] and E. Amooghorban[1, 2]

[1] Department of Physics, University of Shahrekord, Shahrekord

[2] Photonic Research Group, University of Shahrekord, Shahrekord

Abstract- In this paper, we first study energy spectrum of a two- dimensional harmonic oscillator on a sphere. Then, by using the obtained discrete energy spectrum, we construct Gazeau- Klauder coherent states on the sphere, In what follows, we investigate the quantum optical properties of the constructed coherent states.

Keywords: Gazeau- Klauder coherent states, Two- dimensional harmonic oscillator on a sphere

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

۱- مقدمه

یکی از دستگاه مختصات‌های مناسب برای یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی روی سطح کره استفاده از مختصات ژنومی (به زبان حرفه ای در کارتوگرافی) است. این مختصات، مختصات دکارتی روی صفحه ی مماس برکره است. بدین صورت که برای یافتن هر نقطه از مختصات کره، از مرکز کره به نقطه مورد نظر شعاعی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا صفحه مماسی را قطع کند. استفاده از این دستگاه مختصات از این مزیت برخوردار است که حرکت ذره‌ی آزاد روی کره در صفحه مماسی روی یک خط مستقیم تصویر می‌شود. حال اگر مختصات دکارتی روی صفحه‌ی مماسی را با x و y نشان دهیم، در این مختصات هامیلتونی نوسانگر هماهنگ روی سطح یک کره با شعاع R و خمیدگی $\lambda = \frac{1}{R^2}$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:[۱]

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{\pi}^2 + \lambda \hat{L}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\hat{x}^2 + \hat{y}^2\right), \qquad (۱)$$

که در آن داریم:

$$\vec{\hat{\pi}} = \vec{\hat{p}} + \frac{\lambda}{2}\left[\vec{\hat{x}}\left(\vec{\hat{x}}.\vec{\hat{p}}\right) + \left(\vec{\hat{p}}.\vec{\hat{x}}\right)\vec{\hat{x}}\right],$$

$$\hat{L}^2 = \frac{1}{2}\hat{L}_{ij}\hat{L}_{ij}, \quad L_{ij} = \hat{x}_i\hat{p}_j - \hat{x}_j\hat{p}_i. \qquad (۲)$$

می‌توان نشان داد که برای این نوسانگر جبر زیر برقرار است: [۲]

$$\left[\hat{n}, \hat{A}^+\right] = \hat{A}^+, \left[\hat{n}, \hat{A}\right] = \hat{A}, \qquad (۳)$$

می‌توان نشان داد که برای نوسانگر هماهنگ دو بعدی روی سطح کره تابع ساختار به شکل

$$\Phi(E,n) = E^2 - \left(w^2 + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda E\right)(2n+2u-1)^2 + \frac{\lambda^2}{4}(2n+2u-1)^4 . \qquad (۴)$$

و ویژه مقادیر انرژی با رابطه زیر بیان می‌شود[۲]

$$(E_N)_{sphere} \equiv (E_N)_s = \sqrt{1+\frac{\lambda^2}{4}}(N+1) + \frac{\lambda}{2}(N+1)^2 . \qquad (۵)$$

که در آن تابع ساختار $\Phi_s(E,\mathrm{n})$ یک تابع حقیقی مثبت برای $n>0$ و $\Phi_s(E,0)=0$ است. با شرط

$$\Phi_s(E, N+1) = 0, \qquad (۶)$$

آنگاه جبر نوسانگر هماهنگ مزبور دارای یک نمایش متناهی است، به طوری که N بعد نمایش جبر و بعد فضای فوک متناهی الابعاد مربوط را نشان می‌دهد.

۲- حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر برای طیف انرژی گسسته

به طور کلی برای سامانه‌ای با طیف انرژی گسسته حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر به صورت زیر تعریف می‌شود: [۳] و [۴]

$$|J,\gamma\rangle = N^{-1}(J)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^{n/2}\,e^{-i(e_n\gamma)}}{\sqrt{\rho_n}}|n\rangle. \qquad (۷)$$

در این رابطه $0 \le J < R$ بوده که R شعاع همگرایی نامیده می‌شود و رابطه‌ی آن به صورت زیر است:

$$R = \lim \sqrt[n]{\rho_n}\ . \qquad (۸)$$

همچنین داریم:

$$\rho_n \equiv \int_0^R u^n \rho(u)du \ \text{ و } \ \rho(u) \ge 0. \qquad (۹)$$

$N(J)$ نیز توسط شرط بهنجارش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N^2(\mathrm{J}) = \sum_{n=0}^{\infty} J^n/\rho_n . \qquad (۱۰)$$

اگر شرط $0 = e_0 < e_1 < e_2 \ldots$ را اعمال کنیم، آنگاه داریم:

$$\rho_n = e_1 e_2 \ldots e_n \ . \qquad (۱۱)$$

حالت تعریف شده با رابطه (۷) یک حالت همدوس است اگر چهار شرط زیر را دارا باشد:

۱- پیوستگی در برچسب؛ اگر $(J,\gamma)\to(J',\gamma')$ میل کند باید داشته باشیم:

$$|J,\gamma\rangle \to |J',\gamma'\rangle.$$

۲- برقرار بودن رابطه تفکیک

$$\int |J,\gamma\rangle\langle J,\gamma| d\mu(J,\gamma) = 1.$$

۳- رابطه‌ی تحول زمانی به صورت زیر برقرار باشد:

$$e^{-iHt}|J,\gamma\rangle = |J,\gamma+\omega t\rangle.$$

۴- برقرار بودن رابطه‌ی کنش واحد:

$$\langle J,\gamma|H|J,\gamma\rangle = \omega J.$$

۳-حالت‌های همدوس گازیو- کلاودر روی سطح کره:

ویژه مقادیر انرژی نوسانگر هماهنگ دوبعدی روی سطح کره از رابطه (۵) به دست آمد، حال برای ساختن حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر مربوط به این سامانه باید e_n و ρ_n را محاسبه کنیم و در رابطه (۷) جایگذاری کنیم. با تعریف

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]

پارامترهای $\alpha=\frac{\lambda}{2}$ و $\beta=\sqrt{1+\alpha^2}$ رابطه ویژه مقادیر انرژی (۶) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\mathrm{E}_n=\alpha(n+1)^2+(n+1)\beta.$$

حال با توجه به اینکه $\mathrm{E}_0=\alpha+\beta\neq 0$ است، برای اینکه $e_0=0$ شود e_n ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_n=\mathrm{E}_n-\mathrm{E}_0=\alpha\left[n^2+\left(2+\frac{\beta}{\alpha}\right)n\right].$$

اکنون با استفاده از تغییر متغیر $\mu=2+\frac{\beta}{\alpha}$ داریم:

$$e_n=n[n+\mu], \qquad (۱۲)$$

و متعاقباً با استفاده از رابطه (۱۱) به دست می‌آید:

$$\rho_n=n!(n+\mu)!, \qquad (۱۳)$$

که در آن داریم :

$$(n+\mu)!=(n+\mu)(n+\mu-1)!. \qquad (۱۴)$$

ρ_n را می‌توان بر حسب تابع گاما به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_n=\frac{n!\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu)}. \qquad (۱۵)$$

از این رو، حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر نوسانگر هماهنگ روی سطح کره به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$|J,\gamma\rangle=\frac{\Gamma(\mu+1)^{\frac{1}{2}}}{N(J)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^{\frac{n}{2}}\,e^{-i\gamma n(n+\mu)}}{\left[n!\Gamma(n+\mu+1)\right]^{\frac{1}{2}}}|n\rangle. \qquad (۱۶)$$

لازم به ذکراست که $N(J)$ نیز از شرط بهنجارش به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$N^2(J)=\frac{\Gamma(n+1)}{J^{\frac{\mu}{2}}}I_\mu\left(2\sqrt{J}\right). \qquad (۱۷)$$

با جایگذاری $N^2(J)$ به دست آمده در رابطه‌ی (۱۶)، حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر مربوط به نوسانگر روی سطح کره به دست می‌آید:

$$|J,\gamma\rangle=\frac{J^{\frac{\mu}{4}}}{I_\mu\left(2\sqrt{J}\right)^{\frac{1}{2}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^{\frac{n}{2}}\,e^{-i\gamma n(n+\mu)}}{\left[n!\Gamma(n+\mu+1)\right]^{\frac{1}{2}}}|n\rangle. \qquad (۱۸)$$

به وضوح دیده می‌شود که رابطه بالا دارای هر چهار ویژگی حالت‌های همدوس است.

۴- خواص اپتیک کوانتومی حالت‌های همدوس $|J,\gamma\rangle$

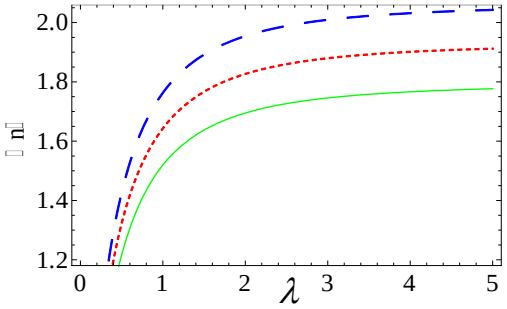
در این بخش، برخی از خواص آمار کوانتومی از قبیل تعداد متوسط فوتون‌ها، پارامتر مندل و چلاندگی حالت‌های همدوس مزبور را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴-۱- شمار میانگین و آمار شمارش فوتون‌ها

شمار میانگین فوتون‌ها در حالت $|J,\gamma\rangle$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\langle n\rangle=\frac{J^{\frac{\mu}{2}}}{I_\mu\left(2\sqrt{J}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J^n}{n!\Gamma(n+\mu+1)}n. \qquad (۱۹)$$

درشکل ۱ شمار میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر بدست آمده برحسب λ رسم شده است.



شکل ۱: شمار میانگین فوتون‌ها برای حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر برحسب λ برای J=10 (خط توپر)، J=11 (نقطه چین) و J=12 (خط چین).

همانطورکه دیده می‌شود، با افزایش J، تعداد متوسط فوتون‌ها افزایش می‌یابد. علاوه بر این افزایش خمیدگی فضای فیزیکی کره نیز باعث افزایش شمار میانگین فوتون‌ها می‌شود.

۴-۲- پارامتر مندل

برای مطالعه‌ی آمار فوتون‌های حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر مزبور لازم است پارامتر مندل [۵] یعنی

$$Q=\frac{\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2-\langle n\rangle}{\langle n\rangle}, \qquad (۲۰)$$

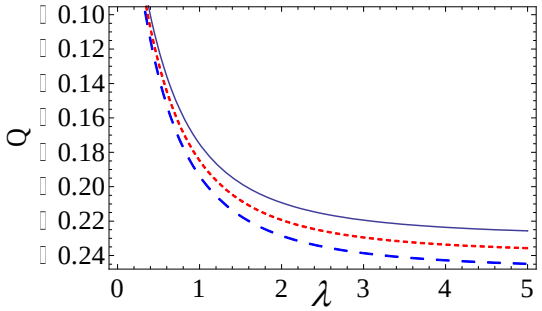
را مورد بررسی قرار دهیم. مقادیر مثبت، صفر و منفی پارامتر مزبور به ترتیب نشانگر آمار فراپواسونی، آمار پواسونی و آمار زیرپواسونی است.

درشکل ۲ اثر انحنای فضا بر پارامتر مندل برای مقادیر مختلف J نشان داده شده است. در واقع با افزایش J و هم چنین افزایش انحنای فضا، سرشت زیرپواسونی آمار شمارش فوتون‌ها تقویت می‌شود. به عبارت دیگر، تا آنجا که به آمار شمارش فوتون‌ها مربوط می‌شود، ویژگی‌های غیر کلاسیک حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ روی کره نسبت به

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]

حالت‌های همدوس نوسانگر هماهنگ در فضای تخت، تقویت می‌شود.



شکل۲: پارامتر مندل برای حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر برحسب λ برای J=10 (خط توپر)، J=11 (نقطه چین) و J=12 (خط چین).

۴-۳- چلاندگی مولفه های کوادراتوری فوتون‌ها

عملگرهای کوراتوری $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر برحسب عملگرهای خلق و فنا تعریف می‌شوند:

$$\hat{X}_1=\frac{1}{2}\left(\hat{a}e^{i\varphi}+\hat{a}^{+}e^{-i\varphi}\right),$$

$$\hat{X}_2=\frac{1}{2i}\left(\hat{a}e^{i\varphi}-\hat{a}^{+}e^{-i\varphi}\right). \qquad (۲۱)$$

چلاندگی (کاهش نوفه های کوانتومی نسبت به حد استاندارد) را می‌توان برای عملگرهای بالا مورد بررسی قرار داد. شرط چلاندگی مولفه های کوادراتوری چنین است. [۶]

$$\left(\square\ \hat{X}_i(\varphi)\right)^2<\frac{1}{4}\left|\left[\hat{X}_1,\hat{X}_2\right]\right|^2, \quad (i=۱ \text{ یا } ۲)$$

یا به طورهم ارز،

$$S_i(\varphi)=4\left(\square\ \hat{X}_i(\varphi)\right)^2-\left|\left[\hat{X}_1,\hat{X}_2\right]\right|^2<0.$$

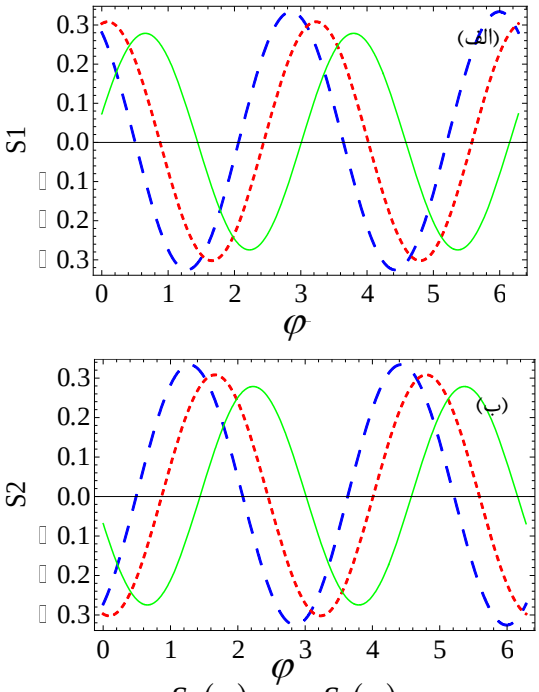
برای حالت همدوس مورد نظر، S_1 و S_2 به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$S_1=2\left|\langle a^2\rangle\right|\cos\left(\theta+2\varphi\right)+2\langle n\rangle-\left(2\left|\langle a\rangle\right|\cos\left(\varphi+\psi\right)\right)^2,$$

$$S_2=2\left|\langle a^2\rangle\right|\cos\left(\theta+2\varphi\right)+2\langle n\rangle-\left(2\left|\langle a\rangle\right|\cos\left(\varphi+\psi\right)\right)^2.$$

که در این روابط $\theta=Arg\langle a^2\rangle$ و $\psi=Arg\langle a\rangle$ است.

در شکل‌های۳(-الف) و ۳(-ب) به ترتیب $S_1(\varphi)$ و $S_2(\varphi)$ برحسب φ برای مقادیر مختلف λ رسم شده است. دیده می‌شود که با افزایش خمیدگی کره، بیشینه‌ی چلاندگی افزایش یافته و علاوه بر این بیشینه به سمت φهای کمتر منتقل می‌شود.



شکل ۳: نمودار (الف) $S_1(\varphi)$ و (ب) $S_2(\varphi)$ برحسب φ به ازای J=1 برای λ=0.04 (خط توپر)، λ=0.05 (نقطه چین) و λ=0.06 (خط چین).

۵- نتیجه گیری

در این مقاله نشان داده شد که افزایش خمیدگی فضای فیزیکی (کره) سبب افزایش ویژگی‌های غیرکلاسیکی (پارامتر مندل و چلاندگی) حالت‌های همدوس گازیو-کلاودر به دست آمده می‌گردد. هم چنین افزایش J نیز، شمار میانگین فوتون‌ها را افزایش داده و باعث تقویت سرشت زیر پواسونی آمار شمارش فوتون‌ها می‌گردد.

مراجع

[1] P. W. Higgs, *Dynamical symmetries in a spherical geometry. I*, J. Phys. A: Math. Gen. **12**, 309 (1979).

[2]A. Mahdifar, R. Roknizadeh and M. H. Naderi, *Geometric approach to nonlinear coherent states using the Higgs model for harmonic oscillator*, J. Phys. A: Math. Gen. **39,** 7003, (2006).

[3] J. P Gazeau and R. Klauder, *Coherent states for Systems with discrete and continuous spectrume*, J. Phys. A: math. Gen. **32** (1999).

[4] R Roknizadeh, M.K. Tavassoly, *Construction of the dual family of Gazeau-Klauder coherent states via temporally stable nonlinear coherent states*, J. Math. Phys. **46**, 042110 (2005).

[5] L. Mandel and E. Wolf, *Optical coherence and quantum optic* (Cambridge University Press, Cambridge,1995).

[6] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]