



## ناپایداری ریلی-تیلور در حضور اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی

زمندی، فاطمه<sup>۱</sup>؛ مومنی، مهدی<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>دانشگاه فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

### چکیده

در این مقاله ناپایداری ریلی-تیلور در یک پلاسمای کوانتومی مغناطیده، با رسانندگی بالا مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از معادلات مگنتو هیدرودینامیک کوانتومی و با فرض متخلخل بودن محیط و همچنین با استفاده از شرایط مرزی مناسب روابط پاشندگی بدست آمده است. منحنی نرخ رشد ناپایداری به ازاء مقادیر مختلف پارامتر کوانتومی و میدان مغناطیسی مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان می دهد که با افزایش پارامتر کوانتومی و همچنین میدان مغناطیسی نرخ رشد ناپایداری ریلی-تیلور کاهش می یابد.

## Rayleigh–Taylor instability in the presence of quantum effect and magnetic field

Momeni, Mahdi<sup>1</sup>; Zamandi, Fatemeh<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, University of Shahrood, Shahrood,

### Abstract

In this paper Rayleigh–Taylor instability in a quantum magnetized plasma with highly conducting has been investigated. Using quantum magnetohydrodynamics equations and assuming the porous media and also with appropriate boundary conditions the dispersion relation is obtained. The curve instability growth rate in term of varying amounts of quantum parameter and magnetic field has been shown. The result shows that increasing in quantum parameter and magnetic field lead to decreasing of the instability.

PACS No.A-10-1045-1

### مقدمه

دانشمندان مسئله ریلی-تیلور در مگنتو هیدرودینامیک MHD با رسانایی محدود را بررسی کرده و دریافته اند که رسانایی محدود راه حل های جدید و غیرمنتظره معرفی می کند [۶]. همچنین پدیده ی اثرات میدان الکتریکی مماسی روی ناپایداری ریلی-تیلور بررسی شد و نقش تغییرناپذیر این میدان مشخص گردید [۷].

مطالعه ی پلاسمای کوانتومی توجهات زیادی را در دهه های اخیر بخاطر کاربرد های قابل توجهی از علوم نانو و اختر فیزیک به خود جلب کرده است، در پلاسمای کوانتومی، اثرات برخوردی منجر به ناپایداری های پلاسمای نوسان ها و امواج می شود. یک مدل ساده ی ریاضی که برای مطالعه ی دینامیک پلاسمای چگال در دامنه های اختر فیزیکی یافت می شود، مدل سیالات MHD می باشد، که بطور گسترده برای بحث انتشار امواج در پلاسمای سرد یا داغ استفاده

ناپایداری هیدرودینامیکی ریلی-تیلور یک ناپایداری ماکروسکوپی مهم است که هنگامی که یک سیال سنگین در حضور میدان گرانشی توسط یک سیال سبک نگه داشته می شود، رخ می دهد. ناپایداری ریلی-تیلور در پدیده های نجوم و اختر فیزیک به عنوان مثال، در کرونا(قوس خورشیدی)، انفجار درونی ابرنو اختر ها، سحابی خرچنگ و... اهمیت ویژه دارد. این ناپایداری همچنین نقش مهمی در همجوشی محصور شدگی لختی (ICF) و لیزر پلاسمای ایفا می کند. تاکنون تاثیر موضوعات متنوعی از جمله اثرات حرکتی ویسکوزیته و مقاومت مغناطیسی، تخلخل و نفوذ پذیری و... روی ناپایداری ریلی-تیلور مطالعه شده است [۵]–[۹].

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i} \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \nabla(\nabla^2 \rho_1) - \frac{1}{2\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla^2 \rho_0 \\ & - \frac{1}{2\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla^2 \rho_1 + \frac{\rho_1}{2\rho_0^2} \nabla \rho_0 \nabla^2 \rho_0 \\ & - \frac{1}{2\rho_0} \nabla(\nabla \rho_0 \cdot \nabla \rho_1) + \frac{\rho_1}{4\rho_0^2} \nabla(\nabla \rho_0)^2 + \\ & \frac{1}{2\rho_0^2} \nabla \rho_1 (\nabla \rho_0)^2 + \frac{1}{\rho_0^2} \nabla \rho_0 (\nabla \rho_0 \cdot \nabla \rho_1) \\ & - \frac{\rho_1}{\rho_0^3} (\nabla \rho_0)^3 \end{aligned} \right] \quad (8)$$

با فرض اینکه همه‌ی کمیت‌های اختلالی در فضای  $(x, y, z)$  و زمان  $t$  به صورت زیر تغییر می‌کنند.

$$f_1(x, y, z, t) = f_1(z) \exp(ik_x x + ik_y y + i\omega t) \quad (9)$$

که در آن  $k_x$  و  $k_y$  به ترتیب نشان دهنده‌ی اعداد موج در جهت‌های  $x$  و  $y$  بوده و  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  عدد موج اختلالی است، در حالیکه  $\omega (\omega = \sigma_r + i\sigma)$  فرکانس اختلالات هارمونیک می‌باشد.

با استفاده از اختلال تعریف شده بوسیله‌ی معادله (۵) و جایگذاری آن در معادله‌های خطی شده‌ی بالا، معادلات مولفه‌ای آنها را به شکل زیر بدست می‌آوریم:

(۱۰)

$$\left( \begin{aligned} & \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) u_x = -ik_x P_1 + \bar{Q}_x \\ & + \frac{B_{1z}}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \end{aligned} \right) \quad (11)$$

(۱۲)

$$\left( \begin{aligned} & \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) u_z = -\frac{\partial}{\partial z} P_1 + \bar{Q}_z - \rho_1 g \\ & + \frac{B_{0x}(z)(ik_x B_{1z} - \frac{\partial}{\partial z} B_{1x})}{\mu_0} - \frac{B_{1x}}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \end{aligned} \right)$$

$$-\varepsilon i\omega \rho_1 + u_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

$$ik_x u_x + ik_y u_y + i \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (14)$$

(۱۵)

$$\left( \begin{aligned} & (B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}) = \\ & \left( -\frac{B_{0x}(z) ik_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}}{i\omega \varepsilon}, \frac{B_{0x}(z) ik_x u_y}{i\omega \varepsilon}, \frac{B_{0x}(z) ik_x u_z}{i\omega \varepsilon} \right) \end{aligned} \right)$$

می‌شود. اثرات کوانتومی درسیستم‌های با چگالی بالا و دمای پایین هنگامی که طول موج دوپروی ذرات باردار بزرگتر یا مساوی طول مشخصه‌ی این ذرات باشد، وجود می‌آیند. مدل هیدرودینامیک کوانتومی به منظور توصیف انتقال ذرات باردار اختراع شد [۹]. و شرایط ایده آلی برای تعادل MHD ایجاد کرد.

در این مقاله به مطالعه ترکیب اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی روی ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه ای متخلخل پرداخته شده است.

## مدل ریاضی

فرض می‌کنیم یک پلاسمای تراکم ناپذیر، سیال لایه ای با عمق  $h$  که بوسیله دو صفحه  $z=0$  و  $z=h$  مرزبندی شده، داریم که در صفحه افقی جهت‌های  $(x, y)$  هیچ مرز مشخصی ندارد. سیال به عنوان رسانای نامحدود، چسبنده و متخلخل در نظر گرفته شده است. سیال در یک میدان مغناطیسی متغیر  $B(B_x(z), 0, 0)$  و میدان گرانشی  $g(0, 0, -g)$  جاسازی شده است. در اینجا معادلات اساسی کوانتوم هیدرودینامیکی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla P + \rho g - \frac{\mu}{k_1} U + Q + \frac{(\nabla \times B) \times B}{\mu_0} \quad (1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (U \times B) \quad (4)$$

که در آن  $\varepsilon$  و  $k_1, \mu, p, U, \rho$  به ترتیب نشان دهنده‌ی چگالی سیال، سرعت سیال، فشار، ویسکوزیته (چسبندگی)،

تخلخل و نفوذپذیری می‌باشند.  $Q = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i} \rho \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right)$

فشار کوانتومی است که به عنوان پتانسیل بوهم شناخته می‌شود، که در آن  $\hbar$  ثابت پلانک،  $m_e$  جرم الکترون و  $m_i$  جرم یون می‌باشند. اختلال مرتبه‌ی اول از معادله بالا بوسیله روش حالت معمولی را، با فرض اینکه همه‌ی کمیت‌های فیزیکی ترکیبی از بخش‌های تعادلی و اختلالی هستند، بدست می‌آوریم. معادلات (۱)-(۴) را به فرم خطی‌اش می‌نویسیم:

$$\varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 U_1) = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \cdot U_1 = 0 \quad (6)$$

$$\varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial t} = (B_0 \cdot \nabla) U_1 - (U_1 \cdot \nabla) B_0 \quad (7)$$

### ۳- رابطه پاشندگی پلاسمای لایه‌ای

حال فرض می‌کنیم پلاسمای لایه ای با ضخامت محدود بوسیله دو مرز سخت از  $z = 0$  تا  $z = h$  مرز بندی شده است. ما همچنین فرض کرده ایم که چگالی و میدان مغناطیسی به صورت نمایی به  $z$  وابسته اند. بنابراین، چگالی و توزیع میدان مغناطیسی به ترتیب بدین صورت داده می-شوند:

(۲۴)

$$\rho_0(z) = \rho_0 \exp(z/L_D); B_{0x}(z) = B_{0x}(z) \exp(z/2L_D)$$

که  $L_D$  مقیاس ارتفاع چگالی است. جواب

عمومی معادله (۱۹) با استفاده از شرایط مرزی  $u_z = 0$  در  $z = 0$  و  $z = h$  را اینطور حدس می‌زنیم:

$$u_z = u_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \exp(\lambda z) \quad (25)$$

در اینجا  $n$  یک عدد صحیح و  $\lambda = \left(-\frac{1}{2L_D}\right)$  می‌باشند. معادله (۱۹) با کمک معادله (۲۴) و (۲۵) حل شده و مقادیر زیر را نتیجه می‌دهد:

(۲۶)

$$\omega^* = \omega_q^2 k^2 + k_x^2 v_A^2 - \left[ \frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} \right]$$

که  $\omega_q^2 = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e L_D^2}$  اثرات کوانتومی را توصیف می‌کند و  $v_A^2 = \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0 \rho_0}$  با عنوان سرعت آلفونی شناخته می‌شود.

معادله (۲۶) رابطه‌ی پاشندگی ناپایداری ریلی-تیلور در پلاسمای مغناطیده کوانتومی را نشان می‌دهد. رابطه‌ی پاشندگی ترکیبی از اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی روی پلاسمای لایه‌ای را در خود دارد.

### ترکیب اثرات کوانتومی و میدان

#### مغناطیسی در محیط متخلخل

برای راحتی در انجام عملیات ریاضی، رابطه‌ی پاشندگی عمومی برای ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه ای در حضور کوانتوم و میدان مغناطیسی در محیط متخلخل می‌تواند با استفاده

از  $\omega = i\sigma$  و  $k_x = k \cos \theta$  نوشته شود که  $\theta$  انحراف بردار

موج  $k$  از میدان مغناطیسی  $H$  است، مانند:

(۲۷)

$$\sigma^2 + \sigma \left( \frac{\varepsilon U}{k_1} \right) + \omega_q^2 k^2 + k_x^2 v_A^2 - \frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} = 0$$

$$\bar{Q}_x = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e \varepsilon \omega} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left\{ \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right) \right\} u_z + \left\{ -\frac{k^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \right\} u_z \right] \quad (16)$$

$$\bar{Q}_y = \frac{k_y}{k_x} \bar{Q}_{x1} \quad (17)$$

$$\bar{Q}_z = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e i \varepsilon \omega} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} - \frac{3}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{3}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \right\} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \rho_0}{\partial z^4} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{5}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} + \frac{k^2}{2\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{\rho_0^3} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^4 \right\} u_z \right] \quad (18)$$

برای استخراج مولفه‌ی  $Z$  سرعت،  $ik_y, ik_x$  را به ترتیب در معادله‌های (۶) و (۷) ضرب کرده و سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم و با استفاده از معادله (۸) بدست می‌آوریم:

$$\left( \rho_0 \omega^* + k^2 A - \frac{B_{0x}^2(z) k_x^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left[ \omega^* \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + k^2 B - \frac{2B_{0x}(z) k_x^2}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \right] \frac{\partial u_z}{\partial z} - \left[ \rho_0 \omega^* k^2 - \frac{B_{0x}^2(z) k_x^2}{\mu_0} - (C - g) k^2 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right] u_z = 0 \quad (19)$$

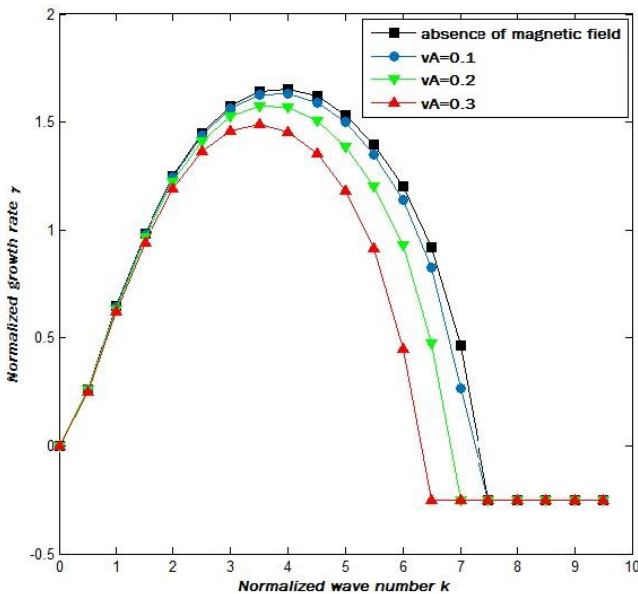
$$A = -\frac{\hbar^2}{4m_i m_e \rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \quad (20)$$

(۲۱)

$$B = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e \rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left\{ \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 - 2\rho_0 \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right\} \quad (22)$$

$$C = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e \rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right) \omega^* = i\omega \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right)$$

نرخ رشد با افزایش مقدار میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد بنابراین میدان مغناطیسی نیز باعث کاهش ناپایداری ریلی-تیلور می‌گردد.



شکل ۲. نرخ رشد در مقایسه با عدد موج برای مقادیر مختلف از میدان مغناطیسی

### نتیجه گیری

در این مقاله، اثرات میدان همراه با فشار کوانتومی روی ناپایداری ریلی-تیلور پلاسما لایه‌ای در یک محیط متخلخل را بررسی کرده‌ایم. رابطه‌ی پاشندگی برای سیستم توسط حل کوانتومی معادلات MHD بدست آمد. روابط پاشندگی در حالت‌های مختلف بحث شد و مشخص شد که سیستم پایداری اش را در حضور اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی بدست می‌آورد. محاسبات عددی روی نرخ رشد ریلی-تیلور نشان می‌دهد که اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی روی حالت ناپایدار، بی‌ثباتی ریلی-تیلور تأثیرات پایا دارند. بنابراین، ناپایداری ریلی-تیلور پلاسما لایه‌ای در حضور اثرات کوانتومی همراه با میدان مغناطیسی در محیط متخلخل پایا است.

### مرجع‌ها

- [1] L Rayleigh Proc. of London Math. Soc. 14 170 (1882).
- [2] G I Taylor Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci. 201 192 (1950).
- [3] S Chandrasekhar Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Oxford: Clarendon press) (1961).
- [4] H Alfvén on the Origin of the Solar System (Oxford: Clarendon Press) (1954).
- [5] P H Roberts Astrophys. J. 137 679 (1963).
- [6] J D Jukes J. Fluid Mech. 16 177 (1963).
- [7] N T Eldabe J. Phys. Soc. Japan 5 115 (1989).
- [8] J Cao, H Ren, Z Wu and P K Chu Phys. Plasmas 15 01 (2008).
- [9] F Hass Phys. Plasmas 12 062117 (2005).

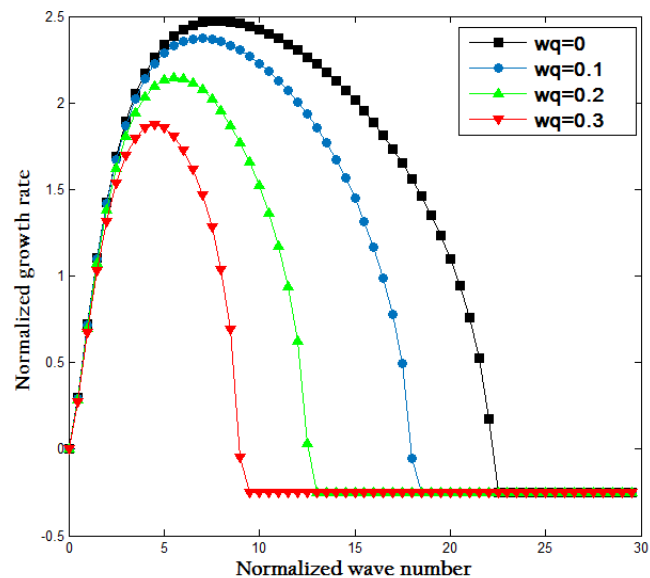
نرخ رشد برای این ساختار بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = -\frac{\varepsilon v}{k_1} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon v}{k_1}\right)^2 + 4 \left\{ \frac{4gk^2 h^2 l_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 l_D^2 + 4h^2 k^2 l_D^2} - \omega_q^2 k^2 - k_x^2 v_A^2 \cos \theta \right\}} \quad (28)$$

به منظور مشاهده‌ی تأثیر پارامترهای میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی روی نرخ رشد ناپایداری ریلی-تیلور پلاسما لایه‌ای، معادله‌ی (۲۸) بصورت عددی حل شده و نتایج در شکل ۲ و ۱ نمایش داده شده‌اند. شکل‌ها را بین نرخ رشد  $(\sigma)$  و عدد موج  $(k)$  برای مقادیرهای متفاوتی از اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی رسم کردیم. در شکل ۱ با جایگزین کردن پارامترهای

$$g^* = 10, \omega_q^* = 0.1, 0.2, 0.3, k_1 = 0.1, v^* = 0.5, V_A^* = 0.2, \theta = 45^\circ, \varepsilon = 0.1, h^* = 1, n = 1$$

نشان داده ایم که نرخ رشد با افزایش مقادیری از اثرات کوانتومی، کاهش می‌یابد و این نشان دهنده‌ی اینست که اثرات کوانتومی باعث پایداری بیشتر سیستم ریلی-تیلور می‌شود.



شکل ۱. نرخ رشد در مقایسه با عدد موج برای مقادیر مختلف از اثرات کوانتومی

بطور مشخص

$$h^* = 1, n = 1, g^* = 10, V_A^* = 0.1, 0.2, 0.3, k_1 = 0.1, v^* = 0.5, \varepsilon = 0.1, \theta = 45^\circ, \omega_q^* = 0.4$$

را در معادله‌ی (۲۸) جایگذاری کردیم و نتایج نشان داده شده در شکل ۲ بدست آمد. با توجه به این شکل ما دریافتیم که