بیست و سومین کنفرانس اپتیک و فوتونیک و نهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
دانشگاه تربیت مدرس
۱۲-۱۴ بهمن ۱۳۹۵
23rd Iranian Conference on Optics and Photonics and 9th Conference on Photonics Engineering and Technology
Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
January 31- February 2, 2017

بازیابی حالت یک میدان کوانتیده درکاواک اتلافی با اندازه‌گیری توابع توزیع شبه احتمال

نوید یزدان‌پناه[۱]، محمدکاظم توسلی[۱،۲]، هکتور مانوئل مویا سزا[۳]

(۱)گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

(۲)گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد

(۳) موسسه ملی اپتیک و الکترونیک، تونانتزینتلا، مکزیک

چکیده – در این مقاله، احتمال بازیابی حالت کوانتومی میدان را از طریق اندازه‌گیری توابع توزیع شبه احتمال، در یک کاواک اتلافی مطالعه می‌کنیم. بدین منظور، برهم‌کنش یک اتم دوترازی با یک میدان کوانتیده تک‌مد را درکاواک اتلافی بررسی کرده و با استفاده از رهیافت ابرعملگری، شکل صریح عملگر چگالی سامانه‌ی اتم- میدان را محاسبه می‌کنیم. سپس، روشی ارائه می‌دهیم که به کمک آن با اندازه‌گیری قطبش اتم، توابع توزیع شبه احتمال میدان و در نتیجه آمار کوانتومی آن محاسبه می‌شود.

کلید واژه- اندازه‌گیری آمار کوانتومی میدان، توابع توزیع شبه احتمال، کاواک اتلافی.

Reconstruction of a quantized field state in a lossy cavity via measuring the quasiprobability distribution functions

N. Yazdanpanah[(1)]; M. K. Tavassoly[(1),(2)], H. M. Moya-Cessa[(3)]
(1) Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University
(2) Photonic Research Group, Engineering Research Center, Yazd University
(3) International Institute of Optics and Electronics, Tonantzintla, Mexico

Abstract- In this paper, we study the probability of reconstruction of quantum field state in a lossy cavity via measuring the quasiprobability distribution functions. In order to achieve this purpose, we consider the interaction between a two-level atom with a single mode quantized field in a lossy cavity. Using the superoperator approach, the explicit form of density operator of atom-field system is obtained. Then, we propose a method by which the quasiprobability distribution function of field as well as its statistics are obtained via measuring the atomic polarization.

Keywords: Measuring the quantum statistics of field, quasiprobability distribution function, lossy cavity.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

۱- مقدمه

بررسی آمار یک حالت کوانتومی با گذشت زمان یکی از موضوع‌های اساسی در اپتیک کوانتومی است [۱,۲]. در این باب، روش‌های گوناگونی برای اندازه‌گیری آمار میدان کوانتیده داخل یک کاواک پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان به بازیابی حالت‌های میدان در کاواک اشاره نمود [۲,۳]. در روش بازیابی حالت‌های میدان در یک کاواک، معمولا از مجموعه‌ی اندازه‌گیری‌های انتخابی روی حالت‌های یک اتم که با میدان درون کاواک در حال برهم-کنش است، استفاده می‌شود [۲]. هم‌چنین، برای بازیابی حالت‌های میدان داخل کاواک می‌توان از بازیابی توابع توزیع شبه احتمال آن میدان در برهم‌کنش با یک اتم استفاده نمود [۳]. در آزمایش‌های واقعی برای بازیابی حالت‌های میدان، عوامل اتلافی مانند گسیل خودبه‌خودی اتم، میرایی اتمی و نیز نشت فوتونی کاواک اجتناب‌ناپذیر است. لذا، برای بازیافت کامل حالت‌های یک میدان، بایستی عوامل اتلافی را به حساب آورد.

برای بازیابی حالت‌های میدان در یک کاواک، توابع توزیع شبه احتمال را به صورت زیر داریم [۳]:

$$F(\alpha,s)=\frac{1}{\pi(1-s)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^{k}\langle k|\hat{D}^{\dagger}(\alpha)\hat{\rho}\hat{D}(\alpha)|k\rangle \quad (۱)$$

که در آن s پارامتر مشخصه تابع توزیع بوده و تعیین کننده-ی نوع تابع توزیع شبه احتمال است. در حالتی که $s=-1$ باشد، تابع توزیع از نوع هوسیمی و اگر $s=0$ باشد، تابع توزیع از نوع ویگنر و اگر $s=1$ باشد، تابع توزیع گلاوبر-سودارشان است [۴].

هم‌چنین $\hat{\rho}$ ماتریس چگالی سامانه و $|\alpha,k\rangle=\hat{D}(\alpha)|k\rangle$ حالت همدوس عددی نامیده می‌شود که در آن $\hat{D}(\alpha)$ بیانگر عملگر جابجایی گلاوبر [۴] و $|k\rangle$ و $|\alpha\rangle$ به ترتیب نشان‌دهنده حالت‌های عددی و همدوس هستند. از رابطه (۱) می‌توان دریافت که برای دست‌یابی به یک تابع توزیع شبه احتمال، نیاز به محاسبه عناصر قطری ماتریس چگالی جابه‌جا شده سامانه با دامنه α داریم.

در این پژوهش، هدف این است که حالت کوانتومی یک میدان که در برهم‌کنش با یک اتم دوترازی است را با در نظر گرفتن عوامل اتلاف اتمی و نشت فوتونی کاواک، توسط توابع توزیع شبه احتمال به دست آورده و کلیه اطلاعات مربوط به سامانه را که در اثر عوامل اتلافی از بین رفته‌اند، بازیابی کنیم.

۲- برهم‌کنش میان یک اتم دوترازی و یک میدان کوانتیده تک‌مد در یک کاواک اتلافی

در این بخش، برهم‌کنش میان یک اتم دوترازی با یک میدان کوانتیده تک‌مد را در یک کاواک واقعی در نظر می‌گیریم. معادله حرکت کلی این سامانه در تصویر برهم‌کنش به صورت

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt}=-i\chi\left[\hat{n}\,\hat{\sigma}_z,\hat{\rho}\right]+\hat{L}_F\hat{\rho}+\hat{L}_A\hat{\rho} \quad (۲)$$

می‌باشد که χ ثابت جفت‌شدگی برهم‌کنش پاشنده [۵] و $\hat{n}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ است که در آن $\hat{a}$ ($\hat{a}^{\dagger}$) عملگر نابودی (آفرینش) فوتونی میدان است. هم‌چنین $\hat{\sigma}_z$ بیانگر عملگر وارونی جمعیت اتمی و $\hat{\rho}$ ماتریس چگالی سامانه اتم-میدان است. در معادله (۲) جملات میرایی اتمی و نشت فوتونی کاواک به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{L}_j\hat{\rho}=\left(\hat{J}_j+\hat{K}_j\right)\hat{\rho},\qquad j=A,F \quad (۳)$$

که زیرنویس‌های "A" و "F" به ترتیب مربوط به زیرسامانه-های "اتم" و "میدان" هستند. برای حل معادله حرکت (۲)، از روش ابرعملگری استفاده می‌کنیم. بدین منظور، ابرعملگرهای متناظر برای سامانه‌ی مذکور را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned}&\hat{J}_A\hat{\rho}=2\Gamma\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\,\hat{\sigma}_+,\qquad \hat{J}_F\hat{\rho}=2\gamma\hat{a}\hat{\rho}\,\hat{a}^{\dagger}\\&\hat{K}_A\hat{\rho}=-\Gamma\left(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}+\hat{\rho}\,\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right)\\&\hat{K}_F\rho=-\gamma\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho}+\hat{\rho}\,\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)\end{aligned} \quad (۴)$$

حال جواب تحلیلی ابرعملگری معادله (۲) را به صورت زیر پیشنهاد می‌کنیم:

(۵)

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]

$$\hat{\rho}(t)=e^{\left(\hat{R}+\hat{K}_A+\hat{K}_F\right)t}$$
$$\times\exp\left(\int_0^t e^{-\left(\hat{R}+\hat{K}_A+\hat{K}_F\right)t'}\left(\hat{J}_A+\hat{J}_F\right)e^{\left(\hat{R}+\hat{K}_A+\hat{K}_F\right)t'}\right)\hat{\rho}(0)$$

که

ابرعملگر $\hat{R}$ به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$\hat{R}\hat{\rho}=-i\chi\hat{n}\,\hat{\sigma}_z\hat{\rho}+i\chi\,\hat{\rho}\,\hat{n}\,\hat{\sigma}_z \qquad (۶)$$

با

انجام محاسبات بسیار طولانی و با استفاده از روابط جابجایی بین ابرعملگرهای موجود در رابطه (۵) داریم:

$$\hat{\rho}(t)=e^{\left(\hat{R}+\hat{K}_A+\hat{K}_F\right)t}$$
$$\times\exp\left(\hat{J}_A\frac{1-e^{-\left(\hat{R}_F+2\Gamma\right)t}}{\left(\hat{R}_F+2\Gamma\right)}\right)\exp\left(\hat{J}_F\frac{1-e^{-\left(\hat{R}_A+2\gamma\right)t}}{\left(\hat{R}_A+2\gamma\right)}\right)\hat{\rho}(0) \qquad (۷)$$
$$=\hat{\rho}_1(t)+\hat{\rho}_2(t)$$

حال ابرعملگرهای $\hat{R}_F$ و $\hat{R}_A$ در رابطه (۷) را به صورت ذیل معرفی می‌کنیم:

$$\hat{R}_F\hat{\rho}=2i\chi\hat{n}\,\hat{\rho}-2i\chi\,\hat{\rho}\,\hat{n}$$
$$\hat{R}_A\hat{\rho}=i\chi\,\hat{\sigma}_z\hat{\rho}-i\chi\,\hat{\rho}\,\hat{\sigma}_z \qquad (۸)$$

با

در نظر گرفتن کلی‌ترین حالت اولیه برای سامانه اتم-میدان در رابطه (۷) داریم:

$$\hat{\rho}(0)=\hat{\rho}_A(0)\,\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{\rho}_F(0)\,\hat{D}(\alpha) \qquad (۹)$$

که در آن $\hat{\rho}_A(0)=|\psi_A(0)\rangle\langle\psi_A(0)|$ بیانگر حالت اولیه اتم است که با بردار زیر توصیف شده است:

$$|\psi_A(0)\rangle=\sin\theta\,|e\rangle+\cos\theta\,|g\rangle \qquad (۱۰)$$

در رابطه بالا θ یک زاویه دلخواه بوده و بیانگر قطبش حالت اتمی مورد نظر در حالت اولیه است و حالت‌های $|e\rangle$ و $|g\rangle$ به ترتیب بیانگر حالت‌های برانگیخته و پایه اتم مورد نظر هستند. با استفاده از عملگرهای اتمی، می‌توان معادله (۱۰) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\hat{\rho}(0)=\left(\sin^2\theta\,\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ +\sin(2\theta)\,\hat{\sigma}_x\right)$$
$$\times\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{\rho}_F(0)\,\hat{D}(\alpha) \qquad (۱۱)$$

که در آن $\hat{\sigma}_x=(\hat{\sigma}_+ +\hat{\sigma}_-)/2$ بوده و $\hat{\sigma}_+=|e\rangle\langle g|$ و $\hat{\sigma}_-=|g\rangle\langle e|$ است. در نهایت، با انجام محاسبات طولانی برای $\hat{\rho}_1(t)$ در (۷) داریم:

$$\hat{\rho}_1(t)=e^{-\left(\Gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- +\gamma\hat{n}+i\chi\hat{n}\,\hat{\sigma}_z\right)t}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(2\gamma)^m$$
$$\times\hat{a}^m\,\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{\rho}_F(0)\,\hat{D}(\alpha)\,\hat{a}^{\dagger m}$$
$$\times\left\{\left(\frac{1-e^{-2\gamma t}}{2\gamma}\right)^m\left(\sin^2\theta\,\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\right)\right. \qquad (۱۲)$$
$$\left.+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\left(\hat{\sigma}_+\xi^{*m}+\hat{\sigma}_-\xi^m\right)\right\}$$
$$\times e^{-\left(\Gamma\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- +\gamma\hat{n}-i\chi\hat{n}\,\hat{\sigma}_z\right)t}$$

که

در این رابطه $\xi=C(\chi,\gamma,t)+i\,S(\chi,\gamma,t)$ و

$$C(\chi,\gamma,t)=\frac{-2\gamma\cos(2\chi t)+2\chi\sin(2\chi t)}{4\chi^2+4\gamma^2}e^{-2\gamma t}$$
$$+\frac{2\gamma}{4\chi^2+4\gamma^2} \qquad (۱۳)$$
$$S(\chi,\gamma,t)=\frac{-2\gamma\sin(2\chi t)-2\chi\cos(2\chi t)}{4\chi^2+4\gamma^2}e^{-2\gamma t}$$
$$+\frac{2\chi}{4\chi^2+4\gamma^2}$$

به طریق مشابه برای $\hat{\rho}_2(t)$ در (۷) داریم:

$$\hat{\rho}_2(t)=2\Gamma\sin^2\theta\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{l+1}}{(l+1)!}(-1)^l\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!(l-k)!}$$
$$\times(2\Gamma)^{l-k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-e^{-2\gamma t})^m}{m!}(2i\chi)^k\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{k!}{j!(k-j)!} \qquad (۱۴)$$
$$\times e^{(i\chi-\gamma)\hat{n}t}\hat{n}^{k-j}\hat{a}^m\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{\rho}_F(0)\hat{a}^{\dagger m}\hat{D}(\alpha)\,\hat{a}^{\dagger m}\,\hat{n}^j$$
$$\times e^{e^{(-i\chi-\gamma)\hat{n}t}}|g\rangle\langle g|$$

س از به دست آوردن شکل صریح عملگر چگالی می‌توان تابع توزیع شبه احتمال را اندازه‌گیری کرد.

۳- اندازه‌گیری تابع توزیع شبه احتمال

در این بخش، برای اندازه‌گیری تابع توزیع شبه احتمال، روشی را با استفاده از اندازه‌گیری قطبش اتمی ارائه می‌دهیم. برای این منظور، با استفاده از روابط (۷)، (۱۲) و (۱۴) قطبش اتم را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle=Tr(\hat{\rho}\hat{\sigma}_x)=\frac{1}{4}\sin(2\theta)e^{-\Gamma t}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2\eta nt}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2\gamma\xi^*)^m}{m!}$$
$$\times\frac{(n+m)!}{n!}\langle n+m|\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{\rho}_F(0)\hat{D}(\alpha)|n+m\rangle \qquad (۱۵)$$
$$+c.c.$$

که

و $2\gamma\xi^*=\frac{\gamma}{\xi}(1-e^{-2\eta t})$ است. با تغییر $\eta=\gamma+i\,\chi$

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]

اندیس‌های علامت مجموع در رابطه بالا و انجام محاسبات بسیار طولانی سرانجام خواهیم داشت:

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle=\frac{1}{4}\sin(2\theta)e^{-\Gamma t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma+i\chi e^{-2\eta t}}{\eta}\right)^k \times\langle k|\hat{D}^{\dagger}(\alpha)\hat{\rho}_F(0)\hat{D}(\alpha)|k\rangle+c.c. \quad (۱۶)$$

حال با تعیین

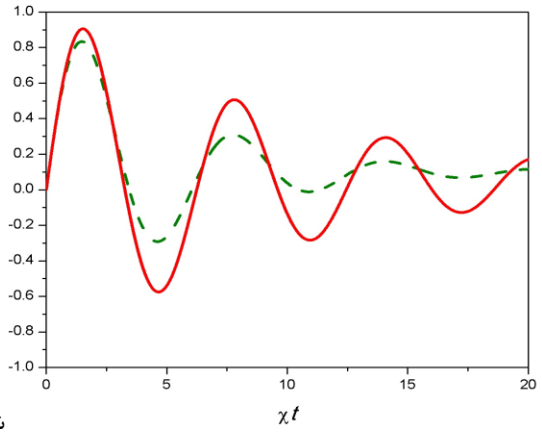
$$\mu=\sqrt{\frac{\varepsilon^2+e^{-4\gamma t}+2\varepsilon\sin(\chi t)\,e^{-2\gamma t}}{1+\varepsilon^2}} \quad (۱۷)$$

و

$$\tan\phi=-\frac{\varepsilon+e^{-2\gamma t}(\sin(\chi t)-\varepsilon\cos(\chi t))}{\varepsilon^2+e^{-2\gamma t}(\cos(\chi t)+\varepsilon\sin(\chi t))}$$

با در نظر گرفتن $\varepsilon=\frac{\gamma}{\chi}$ داریم:

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle=\frac{1}{2}\sin(2\theta)e^{-\Gamma t}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{k}\cos k\phi \times\langle k|\hat{D}^{\dagger}(\alpha)\hat{\rho}_F(0)\hat{D}(\alpha)|k\rangle \quad (۱۸)$$



شکل ۱: نمودار تابع $\varepsilon+e^{-2\gamma t}[\sin(\chi t)-\varepsilon\cos(\chi t)]$ بر حسب χt

در شکل ۱ تابع $\varepsilon+e^{-2\gamma t}[\sin(\chi t)-\varepsilon\cos(\chi t)]$ بر حسب χt به ازای دو مقدار متفاوت γ رسم شده است. با توجه به رابطه (۱۸)، هنگامی که $\tan\phi=0$ شود، این تابع برابر با صفر خواهد شد. حال با تعیین $\phi=\pi$ برای برآورده کردن شرط $\tan\phi=0$ و نیز با در نظر گرفتن $s=\frac{\mu+1}{\mu-1}$ خواهیم داشت:

$$\langle\hat{\sigma}_x\rangle=\frac{1}{2}\sin(2\theta)e^{-\Gamma t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^k \times\langle k|\hat{D}^{\dagger}(\alpha)\hat{\rho}_F(0)\hat{D}(\alpha)|k\rangle \quad (۱۹)$$

حال با مقایسه روابط (۱) و (۱۹) با یکدیگر داریم:

$$F(\alpha,s)=\frac{2e^{\Gamma t}\langle\hat{\sigma}_x\rangle}{(1-s)\pi\sin(2\theta)} \quad (۲۰)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که تابع توزیع شبه احتمال $F(\alpha,s)$ با اندازه‌گیری قطبش اتمی $\langle\hat{\sigma}_x\rangle$ به دست می‌آید و این کار با در نظر گرفتن میرایی اتمی و نشت فوتونی میدان در یک کاواک واقعی امکان‌پذیر است. اگر $s=0$ باشد تابع $F(\alpha,0)$ بیانگر تابع ویگنر بوده که آمار کوانتومی میدان از آن قابل دست‌یابی است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برهم‌کنش پاشنده میان یک اتم دوترازی و یک میدان کوانتیده تک‌مد را در یک کاواک اتلافی بررسی کردیم. برای داشتن اطلاعات نزدیک به واقعیت، میرایی اتمی و نشت فوتونی کاواک را به حساب آوردیم. با استفاده از روش‌های ابرعملگری، معادله حرکت سامانه اتم-میدان را حل نموده و ماتریس چگالی آن را به دست آوردیم. سپس با اندازه‌گیری قطبش اتمی برای کلی‌ترین حالت اولیه سامانه اتم-میدان، رابطه‌ای کاربردی را برای به دست آوردن توابع توزیع شبه احتمال میدان داخل کاواک ارائه دادیم. با استفاده از این حقیقت که این توابع حاوی اطلاعات کاملی در مورد میدان هستند، می‌توان حالت میدان را در هر زمان توسط آن‌ها بازیابی نمود. از آنجا که عوامل میرایی اتمی و میدان در این سامانه در نظر گرفته شده است، پیش بینی می‌شود که نتایج به دست آمده بسیار نزدیک به واقعیت باشند. در نهایت با توجه به رابطه (۲۰) در حالتی که $s=-1$ باشد تابع توزیع هوسیمی و اگر $s=0$ باشد تابع توزیع ویگنر و اگر $s=1$ باشد تابع توزیع گلاوبر-سودارشان قابل اندازه‌گیری هستند.

مراجع

[1] K. Vogel, H. Risken, *Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase*, Phys. Rev. A., Vol 40, P-P 2847-2851, 1989.

[2] L. G. Lutterbach, L. Davidovich, *Method for direct measurement of the Wigner function in cavity QED and ion traps*, Phys. Rev. Lett. 78, P-P 2547-2551, 1997.

[3] H.M. Moya-Cessa, S. M. Dutra, J. A. Roversi, A. Vidiella-Barranco, *Quantum state reconstruction in the presence of dissipation*, J. Mod. Opt. 46, P-P 555-558 , 1999.

[4] M.O. Scully, M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, p. 300 Cambridge University Press, 1997.

[5] J.G. Peixoto de Faria, M.C. Nemes, Phys. Rev. A 59, P-P 3918-3925, 1999.

این مقاله به شرط در دسترس بودن در وبگاه www.opsi.ir معتبر است.

[Downloaded from opsi.ir on 2026-11-08]