

## اثر برخوردهای اتمی بر بیناب نور خروجی یک کاواک اپتیکی حاوی چگالیده‌ی بوز-اینشتین

علی دلفی<sup>۱</sup>، محمد حسین نادری<sup>۲</sup>، محمود سلطان‌الکتابی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>پژوهشکده لیزر و پلاسما، دانشگاه شهید بهشتی، صندوق پستی ۱۹۸۳۹۶۹۴۱۱ تهران

<sup>۲</sup>گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان

چکیده - در این مقاله به بررسی اثر غیرخطی حاصل از برخوردهای اتمی بر بیناب نور خروجی یک کاواک اپتیکی حاوی یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین می‌پردازیم. بدین منظور، مجموعه‌ی اتمی را با یک میدان کوانتومی تک مد توصیف می‌کنیم که با یکی از مدهای اپتیکی درون کاواک، که از طریق یک لیزر دمشی برانگیخته می‌شود، برهم‌کنش می‌کند. با محاسبه‌ی توان بینایی مؤلفه‌ی کوادراتوری فاز نور خروجی، نشان می‌دهیم که چگونه بسامد برخوردهای اتمی بر شکافتگی مدهای نرمال در بیناب نور خروجی اثر می‌گذارد.

کلید واژه- چگالیده‌ی بوز-اینشتین، اپتومکانیک کوانتومی درون کاواک، برخوردهای اتمی

## The effect of atomic collisions on the power spectrum of the output light of an optical cavity containing a Bose-Einstein Condensate

Ali Dalafi<sup>1,2</sup>, Mohammad Hossein Naderi<sup>2</sup>, Mahmoud Soltanolkotabi<sup>2</sup>

Laser and Plasma Research Institute, Shahid Beheshti University, GC., Evin, P.O.B. 1983969411, Tehran, Iran.

<sup>2</sup>Quantum Optics Group, Department of Physics, Faculty of Science, University of Isfahan, Isfahan, Iran

**Abstract-** In this paper, we investigate the nonlinear effect of atomic collisions on the power spectrum of the output light of an optical cavity containing a Bose-Einstein Condensate. For this purpose, we describe the atomic field of the condensate by a single-mode quantum field interacting with one of the optical modes of the cavity which is excited by a driving laser. By calculating the phase quadrature power spectrum of the output optical field, we will show how the atomic collision frequency affects the splitting of the normal modes of the output optical field power spectrum.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate, cavity quantum optomechanics, atomic collisions

## ۱- مقدمه

میدان اپتیکی،  $\Delta_c = \omega_p - \omega_c$  وادندگی لیزر دمشی نسبت به مد اپتیکی ( $\omega_c$  بسامد بازآوایی کاواک)،  $\Omega_c = 4\omega_R + \omega_{sw}$  بسامد مد بوگولیوبوف،  $\omega_{sw} = 8\pi\hbar a_s N / m_0 L w^2$  بسامد پراکندگی در برهم‌کنش میان اتم‌ها،  $a_s$  طول پراکندگی در برهم‌کنش اتم-اتم،  $\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{NU_0}$  ثابت برهم‌کنش بین مد بوگولیوبوف و میدان اپتیکی درون کاواک،  $U_0 = g_0^2 / \Delta_c$  و  $g_0$  بسامد رابی خلأ است.

جملات اول و دوم در معادله‌ی (۱) به ترتیب هامیلتونی میدان‌های اپتیکی و اتمی، جمله‌ی سوم اندرکنش اتم-اتم، جمله چهارم جفت‌شدگی اپتومکانیک بین مد اتمی و فشار تابشی میدان اپتیکی [۷]، و جمله آخر بیانگر اندرکنش لیزر دمشی با میدان داخل کاواک است. در سامانه‌های اپتومکانیک (کاواک‌هایی با آینه‌ی متحرک) [۸،۹] فشار تابشی ناشی از میدان درون کاواک باعث حرکت ارتعاشی آینه‌ی متحرک می‌شود و در نتیجه منجر به بروز یک پتانسیل اندرکنش به شکل جمله‌ی چهارم هامیلتونی (۱) می‌شود که در آن، مد  $c$  نقش مد حرکت ارتعاشی آینه را بازی می‌کند. بدین ترتیب، مد بوگولیوبوف در سامانه‌ی حاضر متناظر با مد ارتعاشی آینه‌ی متحرک در یک سامانه‌ی اپتومکانیک است.

## ۳- دینامیک سامانه‌ی اپتومکانیک

با استفاده از هامیلتونی سامانه می‌توان معادلات هایزنبرگ را برای میدان‌های اپتیکی و اتمی، یعنی عملگرهای  $a$  و  $c$ ، نوشت. اگر فرض کنیم که این عملگرها به صورت مجموع یک مقدار میانگین (عددی) و یک افت و خیز کوانتومی حول مقدار میانگین باشند، یعنی  $a = \alpha + \delta a$  و  $c = \sqrt{N}\beta + \delta c$ ، که در آن‌ها  $\alpha$  و  $\beta$  مقادیر میانگین هستند، آنگاه با خطی‌سازی معادلات و در نظر گرفتن آثار افت و خیز و اتلاف ناشی از برهم‌کنش سامانه با محیط اطراف [۱۰]، می‌توان به مجموعه‌ای از معادلات خطی شده بر حسب عملگرهای افت و خیز  $\delta a$  و  $\delta c$  دست یافت که به معادلات کوانتومی هایزنبرگ-لانژون موسومند. همچنین، برای میدان‌های میانگین هم معادلات دیگری برقرار می‌شود که جواب آنها در حالت پایا به صورت معادلات جبری غیرخطی زیر است:

امروزه، موضوع برهم‌کنش چگالیده‌های بوز-اینشتین به دام افتاده در داخل کاواک‌های اپتیکی با میدان درون کاواک بخش مهمی از پژوهش‌های اپتیک کوانتومی را به خود اختصاص داده است. در چنین سامانه‌هایی می‌توان آثار متقابل برهم‌کنش نور و ماده را در وضعیتی بررسی کرد که هر دو به یک اندازه از خود، خواص کوانتومی بروز می‌دهند [۱]. از دیگر ویژگی‌های مهم چگالیده‌های بوز-اینشتین، بروز اثرهای غیرخطی حاصل از برخوردهای اتمی است که به علت چگالی بسیار زیاد اتم‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۲].

در این مقاله، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان اثر برخوردهای اتمی را در بیناب نور خروجی یک کاواک اپتیکی حاوی چگالیده بوز-اینشتین آشکار کرد. برای این کار می‌توان با استفاده از روش هموداین، توان بینابی مؤلفه‌ی کوادراتوری فاز میدان را اندازه‌گیری کرد [۳].

در بخش ۲ به توصیف نظری سامانه می‌پردازیم و در بخش ۳ دینامیک سامانه را با در نظر گرفتن افت و خیز و اتلاف حاصل از برهم‌کنش سامانه با محیط اطراف به دست می‌آوریم. در بخش ۴ توان بینابی مؤلفه‌ی فاز نور خروجی را محاسبه می‌کنیم و سرانجام در بخش ۵ نتایج به دست آمده را جمع بندی می‌کنیم.

## ۲- توصیف نظری سامانه

سامانه‌ی مورد مطالعه عبارتست از یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین متشکل از تعداد  $N$  اتم دو ترازوی با جرم  $m_0$  و بسامد گذار  $\omega_a$  که در داخل یک کاواک اپتیکی با طول  $L$  قرار گرفته است. کاواک مزبور از طریق یکی از آینه‌هایش به وسیله یک لیزر با بسامد  $\omega_p$  با آهنگ  $\eta$  دمیده می‌شود. در چنین سامانه‌ای می‌توان هر یک از میدان‌های اپتیکی و اتمی را با یک میدان کوانتومی تک مد توصیف کرد که هامیلتونی آن به صورت زیر است [۴،۵]

$$H = \hbar\delta_c a^\dagger a + \hbar\Omega_c c^\dagger c + \frac{1}{4}\hbar\omega_{sw}(c^2 + c^{\dagger 2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar\zeta a^\dagger a(c + c^\dagger) + i\hbar\eta(a^\dagger - a) \quad (1)$$

در اینجا،  $a$  عملگر نابودی میدان اپتیکی درون کاواک و  $c$  عملگر نابودی میدان اتمی چگالیده (مد بوگولیوبوف) است [۶]. علاوه بر این،  $\delta_c = -\Delta_c + \frac{1}{2}NU_0$  بسامد مؤثر

استفاده از توابع هم‌بستگی چشمه‌های نوفه، یعنی روابط

$$\begin{aligned} \langle X_a^{(in)}(\omega) X_a^{(in)}(\omega') \rangle &= \pi(2\bar{n}_{ph} + 1)\delta(\omega + \omega'), \\ \langle P_a^{(in)}(\omega) P_a^{(in)}(\omega') \rangle &= \pi(2\bar{n}_{ph} + 1)\delta(\omega + \omega'), \\ \langle X_a^{(in)}(\omega) P_a^{(in)}(\omega') \rangle &= i\pi\delta(\omega + \omega'), \\ \langle P_a^{(in)}(\omega) X_a^{(in)}(\omega') \rangle &= -i\pi\delta(\omega + \omega'), \end{aligned}$$

می‌توان توان بینایی نور خروجی را به صورت زیر نوشت

$$S_{P_a}^{(out)}(\omega) = (\bar{n}_{ph} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4\pi} \kappa \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' e^{i(\omega'+\omega)t} \langle \delta P_a(\omega') \delta P_a(\omega) + \delta P_a(\omega) \delta P_a(\omega') \rangle$$

در این معادلات،  $\bar{n}_{ph}$  میانگین تعداد فوتون‌های گرمایی است که در حد دماهای پایین و برای بسامدهای اپتیکی تقریباً برابر صفر است. بدین ترتیب برای به دست آوردن توان بینایی نور خروجی باید معادلات هایزنبرگ-لانژون را در فضای بسامد حل کنیم تا مؤلفه‌ی کوادراتوری فاز میدان اپتیکی را به دست آوریم. نتیجه‌ی حل این معادلات برای مؤلفه‌ی  $\delta P_a(\omega)$  به صورت زیر است

$$\delta P_a(\omega) = \chi(\omega)[g_1(\omega)X_a^{(in)}(\omega) + g_2(\omega)P_a^{(in)}(\omega) + g_3(\omega)X_c^{(in)}(\omega) + g_4(\omega)P_c^{(in)}(\omega)] \quad (7)$$

که در اینجا  $\chi(\omega) = [(\Omega_{eff}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{eff}^2]^{-1}$  پذیرفتاری سامانه است که در آن،

$$\Omega_{eff}^2(\omega) = \gamma^2 + \omega_m^2 + \frac{G^2 \Omega_c^{(-)} (\Delta_d^2 + \kappa^2 - \omega^2)}{(\Delta_d^2 + \kappa^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2 \omega^2} \quad (8)$$

$$\Gamma_{eff}(\omega) = 2\gamma - \frac{2\kappa G^2 \Delta_d \Omega_c^{(-)} (\Delta_d^2 + \kappa^2 - \omega^2)}{(\Delta_d^2 + \kappa^2 - \omega^2)^2 + 4\kappa^2 \omega^2} \quad (9)$$

به ترتیب بسامد و ضریب اتلاف مؤثر مد بوگولیوبوف، و

$\omega_m = \sqrt{\Omega_c^{(+)} \Omega_c^{(-)}}$  است. ضرایب  $g_i(\omega)$  عبارتند از

$$\begin{aligned} g_1(\omega) &= \frac{\sqrt{2\kappa} [\Delta_d ((\gamma + i\omega)^2 + \omega_m^2) + G^2 \Omega_c^{(-)}]}{\Delta_d^2 + (\kappa + i\omega)^2} \\ g_2(\omega) &= \frac{\sqrt{2\kappa} (\kappa + i\omega) [(\gamma + i\omega)^2 + \omega_m^2]}{\Delta_d^2 + (\kappa + i\omega)^2} \\ g_3(\omega) &= -\frac{G\sqrt{2\gamma} (\kappa + i\omega) (\gamma + i\omega)}{\Delta_d^2 + (\kappa + i\omega)^2} \\ g_4(\omega) &= -\frac{G\sqrt{2\gamma} \Omega_c^{(-)} (\kappa + i\omega)}{\Delta_d^2 + (\kappa + i\omega)^2} \end{aligned} \quad (10)$$

با استفاده از این روابط، توان بینایی مؤلفه‌ی کوادراتوری فاز نور خروجی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\alpha = \frac{\eta}{\sqrt{\Delta_d^2 + \kappa^2}}, \quad (2)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{U_0 \alpha^2}{\sqrt{(\Omega_c + \frac{1}{2} \omega_{sw})^2 + \gamma^2}}, \quad (3)$$

که در اینجا،  $\Delta_d = -\delta_c - \sqrt{2N} \zeta \beta$ ، و  $\kappa$  و  $\gamma$  به ترتیب ضرایب اتلاف میدان درون کاواک و چگالیده هستند. اکنون با تعریف مؤلفه‌های کوادراتوری میدان‌های اپتیکی و اتمی به صورت

$$\begin{aligned} \delta X_a &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta a + \delta a^\dagger), \quad \delta P_a = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\delta a - \delta a^\dagger), \\ \delta X_c &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\delta c + \delta c^\dagger), \quad \delta P_c = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\delta c - \delta c^\dagger), \end{aligned} \quad (4)$$

می‌توان معادلات هایزنبرگ-لانژون را برای این مؤلفه‌ها به صورت زیر به دست آورد

$$\dot{u}(t) = Au(t) + n(t), \quad (5)$$

که در آن،  $u(t) = [\delta X_a(t), \delta P_a(t), \delta X_c(t), \delta P_c(t)]^T$  بردار عملگرهای افت‌وخیز کوادراتوری، و  $n(t) = [\sqrt{2\kappa} X_a^{(in)}, \sqrt{2\kappa} P_a^{(in)}, \sqrt{2\gamma} X_c^{(in)}, \sqrt{2\gamma} P_c^{(in)}]^T$  بردار عملگرهای نوفه‌ی محیط اطراف است. همچنین  $A$  یک ماتریس چهار در چهار به صورت زیر است

$$A = \begin{pmatrix} -\kappa & -\Delta_d & 0 & 0 \\ \Delta_d & -\kappa & -G & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & \Omega_c^{(-)} \\ -G & 0 & -\Omega_c^{(+)} & -\gamma \end{pmatrix} \quad (6)$$

که در آن،  $G = \sqrt{2} \zeta \alpha$  پارامتر مؤثر جفت‌شدگی فوتون-اتم، و  $\Omega_c^{(\pm)} = \Omega_c \pm \frac{1}{2} \omega_{sw}$  است.

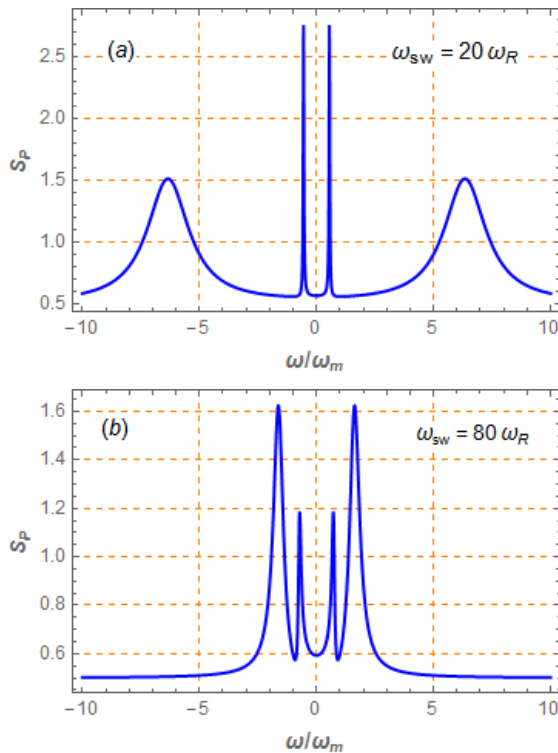
#### ۴- محاسبه توان بینایی مؤلفه‌ی فاز نور خروجی

توان بینایی مؤلفه‌ی فاز نور خروجی در فضای بسامد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۳]

$$S_{P_a}^{(out)}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' e^{i(\omega'+\omega)t} \langle P_a^{(out)}(\omega') P_a^{(out)}(\omega) + P_a^{(out)}(\omega) P_a^{(out)}(\omega') \rangle$$

که در آن،  $P_a^{(out)}(\omega) = \sqrt{2\kappa} \delta P_a(\omega) - P_a^{(in)}(\omega)$  است. به چنین معادلاتی که میدان‌های خروجی را بر حسب میدان ورودی توصیف می‌کنند، روابط ورودی-خروجی می‌گویند [۱۱]. با قراردادن این رابطه در معادله‌ی بالا و با

پیش‌بینی نظری به دست آمده در



شکل ۱: توان بینایی مؤلفه‌ی کوادراتوری فاز نور خروجی بر حسب بسامد بهنجار شده به ازای دو مقدار مختلف بسامد برخورد‌های اتمی. در این دو نمودار، از داده‌های تجربی مراجع [۱۲، ۱۳] استفاده شده است. این مقاله به طور تجربی قابل مشاهده است.

## مراجع

- [1] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [2] O. Morsch and M. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
- [3] V. Giovanetti and D. Vitali, *Phys. Rev. A* **63**, 023812 (2001).
- [4] A. Dalafi, M. H. Naderi, M. Soltanolkotabi, and Sh. Barzanjeh, *Phys. Rev. A* **87**, 013417 (2013).
- [5] A. Dalafi, M. H. Naderi, M. Soltanolkotabi, *J. Mod. Opt.* **61**, 1387 (2014).
- [6] A. Dalafi, M. H. Naderi, M. Soltanolkotabi, and Sh. Barzanjeh, *J. Phys. B* **46**, 235502 (2013).
- [7] R. Kanamoto and P. Meystre, *Phys. Scr.* **82**, 038111 (2010).
- [8] J. D. McCullen, P. Meystre, and E. M. Wright, *Opt. Lett.* **9**, 193-195 (1984).
- [9] P. Meystre, E. M. Wright, J. D. McCullen, and E. Vignes, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1830-1840 (1985).
- [10] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [11] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise* (Springer, Berlin, 2000).
- [12] F. Brennecke, S. Ritter, T. Donner, and T. Esslinger, *Science* **322**, 235 (2008).
- [13] S. Ritter, F. Brennecke, K. Baumann, T. Donner, C. Guerlin, and T. Esslinger, *Appl. Phys. B* **95**, 213 (2009).

$$S_p^{(out)}(\omega) = \frac{1}{2} + \kappa |\chi(\omega)|^2 \left[ |g_1|^2 + |g_2|^2 + |g_3|^2 + |g_4|^2 \right]$$

در شکل ۱ نمودار تابع  $S_p^{(out)}(\omega)$  به ازای دو مقدار مختلف بسامد برخورد‌های اتمی بر حسب بسامد بهنجار شده  $\omega/\omega_m$  رسم شده است. در اینجا از داده‌های تجربی مراجع [۱۲، ۱۳] استفاده کرده‌ایم. به بیان صریح، تعداد اتم  $N = 10^5$  در  $^{87}\text{Rb}$  کاواکی به طول  $L = 178 \mu\text{m}$  و آهنگ اتلاف  $\kappa = 24\omega_R$  به دام افتاده‌اند و تا دمای  $T = 0.1 \mu\text{K}$  سرد شده‌اند. طول موج میدان اپتیکی درون کاواک  $\lambda = 780 \text{nm}$ ، بسامد رایبی خلأ  $g_0 = 2\pi \times 14.1 \text{MHz}$ ، اختلاف بسامد لیزر دمشی با گذار اتمی  $\Delta_a = 748.429 \text{GHz}$ ، و آهنگ دمش کاواک بر روی مقدار  $\eta = 81\omega_R$  تنظیم شده است. همان‌طور که از این نمودارها مشاهده می‌شود به ازای  $\omega_{sw} = 20\omega_R$  دو قله به فاصله تقریبی  $\Delta\omega \approx 6\omega_m$  وجود دارد در حالی که با افزایش بسامد برخورد‌های اتمی به مقدار  $\omega_{sw} = 80\omega_R$ ، فاصله بین دو قله به حدود  $\Delta\omega \approx \omega_m$  کاهش می‌یابد. در واقع بین بسامد برخورد‌های اتمی و اندازه شکافتگی مدهای نرمال نور خروجی یک رابطه یک به یک وجود دارد به طوری که با اندازه‌گیری فاصله بین قله‌ها در توان طیفی نور خروجی می‌توان بسامد برخورد‌های اتمی را اندازه‌گیری کرد. پدیده شکافتگی مد نرمال زمانی روی می‌دهد که دو مد ارتعاشی چنان با هم اندرکنش می‌کنند که ضریب جفت‌شدگی آنها بزرگتر از ضرایب اتلاف هر یک از مدهاست.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی اثر غیرخطی برخورد‌های اتمی بر بیناب نور خروجی یک کاواک اپتیکی حاوی یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین پرداختیم. بدین منظور، مجموعه‌ی اتمی را با یک میدان کوانتومی تک مد توصیف کردیم که با یکی از مدهای اپتیکی درون کاواک که از طریق یک لیزر دمشی برانگیخته می‌شود برهم‌کنش می‌کند. نشان دادیم که آهنگ برخورد‌های اتمی می‌تواند بر اندازه‌ی شکافتگی مدهای نرمال در بیناب نور خروجی کاواک اثر بگذارد. با اندازه‌گیری فاصله بین قله‌ها در توان طیفی نور خروجی می‌توان بسامد برخورد‌های اتمی را اندازه‌گیری کرد. از آنجا که توان بینایی نور خروجی با استفاده از روش هموداین قابل اندازه‌گیری است،