

افزایش درهم تنیدگی کوانتومی در سامانه دو کیوبیتی با استفاده از پس خوراند کوانتومی

رفیعی، مرتضی

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

چکیده - سامانه کوانتومی شامل دو کیوبیت غیربرهمکنشی که در یک محیط مشترک اتلاف گر هستند، را در نظر می گیریم. علاوه بر این، این دو کیوبیت توسط یک میدان خارجی تحریک شده اند و ناشی از اثر محیط مشترک، درهم تنیدگی پایا به میزان کمی در این سامانه وجود دارد. در این تحقیق نشان داده ایم، با استفاده از پس خوراند کوانتومی می توان میزان درهم تنیدگی پایا را در این سامانه افزایش داد. نتایج به دست آمده نشان می دهند که پس خوراند بیزین منجر به افزایش بیشتر در میزان درهم تنیدگی پایای سامانه نسبت به پس-خوراند مارکوفی می شود.

کلید واژه-درهم تنیدگی کوانتومی، پس خوراند کوانتومی، پس خوراند مارکوفی، پس خوراند بیزین.

Enhancement of the entanglement for two qubits system by quantum feedback

Morteza Rafiee

Department of Physics, Shahrood University of Technology, Shahrood

Abstract- We consider the system composed of two non-directly interacting qubits dissipating into a common environment. They are further driven by a resonant classical field. There is a small amount of stationary entanglement for this system via their common environment. We have shown that this stationary entanglement can be increased by quantum feedback. The results show that Bayesian feedback leads to more enhancements of the amounts of stationary entanglement than the Markovian feedback.

Keywords: Quantum Entanglement, Quantum Feedback, Markovian Feedback, Bayesian Feedback

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

حفظ همبستگی‌های کوانتومی یک سامانه کوانتومی برای بسیاری از کاربردهای اطلاع رسانی کوانتومی از قبیل محاسبات کوانتومی [۱]، رمزنگاری کوانتومی [۲] و فرابرد کوانتومی [۳] ضروری است. متأسفانه همبستگی‌های کوانتومی و همدوسی حالت‌های کوانتومی در سامانه‌های واقعی و باز کوانتومی به سرعت تحت برهمکنش با محیط از بین می‌روند. غلبه بر این مشکل، یکی از مهمترین هدف‌های اصلی برای محققان نظری و تجربی در زمینه دانش اطلاع رسانی کوانتومی است. یکی از راه‌های حفظ و افزایش همبستگی‌های کوانتومی استفاده از پس‌خوراند کوانتومی است. پس‌خوراند کوانتومی زمانی بوجود می‌آید که اطلاعات از دست رفته سامانه کوانتومی توسط محیط آن، به منظور تاثیر بر سامانه به آن بازمی‌گردد. بنابراین با استفاده از پس‌خوراندهای کوانتومی می‌توان میزان همبستگی‌های کوانتومی موجود در سامانه را حفظ و یا حتی در شرایطی وابسته به نوع پس‌خوراند کوانتومی و نحوه اعمال آن، افزایش داد. برای سامانه‌های مارکوفی^۱، چرخه پس‌خوراند کوانتومی شامل سامانه کوانتومی، یک آشکارساز کلاسیکی (که اطلاعات کوانتومی را به کلاسیکی تبدیل می‌کند) و یک فعال‌کننده کلاسیکی (به منظور اثر دادن اطلاعات کلاسیکی بر سامانه کوانتومی) است [۴]. دینامیک سامانه به همراه پس‌خوراند مارکوفی را می‌توان توسط معادله اساسی^۲ به دست آورد [۵]. در نوع دیگری از پس‌خوراندهای کوانتومی موسوم به پس‌خوراند بیزین^۳ اندازه و جهت پس‌خوراند در هر لحظه به اندازه‌گیری حالت سامانه در لحظه قبل از آن وابسته است [۶]. اندازه و جهت پس‌خوراند به گونه‌ای انتخاب می‌شود که میزان همبستگی‌های موجود در سامانه (از اندازه‌گیری حالت سامانه در لحظه قبل محاسبه می‌شود)، افزایش یابد.

۲- مدل و سامانه کوانتومی

یک سامانه کوانتومی شامل دو کیوبیت مانند دو اتم دو ترازی بدون برهمکنش مستقیم که در یک محیط مشترک اتلافی قرار دارند را نظر می‌گیریم. میدان

کلاسیکی با فرکانس رابی 2ω با این دو اتم برهم‌کنش می‌کند.

$$H = \omega \Sigma^y, \quad (1)$$

و تحول زمانی حالت سامانه (ρ) توسط معادله اساسی زیر بیان می‌شود ($\hbar=1$).

$$\dot{\rho} = -i\omega[\Sigma^y, \rho] + \gamma D[\Sigma]\rho, \quad (2)$$

در روابط فوق

$$\Sigma^y = \sigma_1^y + \sigma_2^y, \quad \Sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (3)$$

$$D[A]\rho = A\rho A^\dagger - \frac{1}{2}(A^\dagger A\rho + \rho A^\dagger A).$$

σ_i^y ($i=1,2$) مولفه y از ماتریس‌های پائولی، σ_i عملگر پایین‌آورنده اسپینی، γ ضریب اتلاف و $D[A]\rho$ قسمت اتلافی (غیر هرمیتی) تحول در نمایش لیندبلادی آن است. در ادامه محاسبات $\gamma=1$ در نظر گرفته می‌شود. به علت متقارن بودن سامانه دو اتمی مورد بررسی، می‌توان از فضای اندازه حرکت کل برای توصیف دینامیک سامانه استفاده نمود. فضای $J=1$ توسط سه حالت متقارن زیر بسط داده می‌شود (0 نشان‌دهنده اسپین پایین و 1 نشان‌دهنده اسپین بالاست).

$$|1\rangle = |00\rangle; |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle); |3\rangle = |11\rangle. \quad (4)$$

و فضای $J=0$ توسط حالت نامتقارن با بیشینه درهم‌تنیدگی زیر بسط داده می‌شود.

$$|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (5)$$

از آنجاییکه زیرفضای دوم، ویژه حالت هامیلتونی (رابطه (۱)) است و $D[\Sigma]|4\rangle = 0$ ، بنابراین اگر حالت اولیه سامانه در این زیر فضا باشد، در آن باقی خواهد ماند و در صورتیکه در زیر فضای سه‌تایی اول آماده‌سازی شده باشد در همان زیرفضا باقی می‌ماند. بنابراین ماتریس چگالی را می‌توان به صورت بلوکه قطری زیر بیان نمود.

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & 0 \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

بنابراین اگر حالت اولیه سامانه در زیرفضای $J=1$ آماده‌سازی شود، تنها به بررسی ۹ عنصر از ماتریس چگالی نیاز داریم.

^۱ Markovian systems

^۲ Master equation

^۳ Bayesian feedback

۳- پس خوراند مارکوفی^۴

در یک آشکارسازی هوموداین آرمانی، نرخ آشکارسازی فوتون‌ها یک جریان فوتونی پیوسته به همراه نوفه سفید ($\xi(t)$) ایجاد می‌کند به گونه‌ای که

$$\xi(t)dt = dw(t) \quad (۷)$$

که dw تابع افزایشی وینر با میانگین آنسامبلی صفر است و بنابراین

$$E(dw) = 0 \quad \text{و} \quad dw^2 = dt. \quad (۸)$$

که در آن $E(A)$ میانگین آماری کمیت A است. با اندازه‌گیری بر روی مولفه x ماتریس پائولی دو اتم $(\Sigma^x = \sigma_1^x + \sigma_2^x)$ ، مانند آنچه در اندازه‌گیری هوموداین انجام می‌شود معادله اساسی تصادفی زیر به دست می‌آید [۷].

$$d\rho = \{-i\omega[\Sigma^y, \rho] + D[\Sigma]\rho\}dt + H[\Sigma]\rho dw(t), \quad (۹)$$

که در آن

$$H[\Sigma]\rho = \Sigma\rho + \rho\Sigma^\dagger - \text{Tr}(\rho\Sigma^x)\rho. \quad (۱۰)$$

ماتریس چگالی در این معادله تصادفی مقید به جریان اندازه‌گیری زیر است.

$$I(t)dt = \text{Tr}(\rho\Sigma^x)dt + dw. \quad (۱۱)$$

هامیلتونی پس خوراند مارکوفی برای این سامانه به صورت زیر بیان می‌شود.

$$H_{fb} = \lambda I(t)\Sigma^y, \quad (۱۲)$$

که در آن $\lambda \in \mathbb{R}$ و نشان دهنده قدرت پس خوراند است و $I(t)$ جریان اندازه‌گیری بیان شده در رابطه (۱۱) است. در حضور این پس خوراند معادله تصادفی (۹) به صورت زیر بازتعریف می‌شود [۵].

$$d\rho = \{-i\omega[\Sigma^y, \rho] + D[\Sigma]\rho - i[\lambda\Sigma^y, \Sigma\rho + \rho\Sigma^\dagger] + D[\lambda\Sigma^y]\rho\}dt + H[\Sigma - i\lambda\Sigma^y]\rho dw(t). \quad (۱۳)$$

با میانگین‌گیری آنسامبلی بر روی همه حالت‌های تابع توزیع نرمال dw در این معادله تصادفی می‌توان معادله اساسی زیر را برای سامانه به همراه پس خوراند مارکوفی به دست آورد.

$$\dot{\rho} = -i\omega[\Sigma^y, \rho] - i\frac{\lambda}{2}[\Sigma^\dagger\Sigma^y + \Sigma^y\Sigma, \rho] + D[\Sigma - i\lambda\Sigma^y]\rho. \quad (۱۴)$$

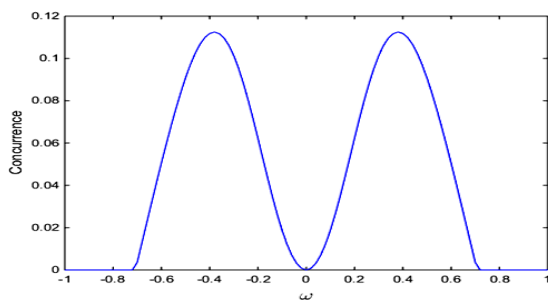
تحول این سامانه با حالت اولیه $|11\rangle$ با حل معادله اساسی فوق به دست می‌آید. از آنجایی که نتایج تحلیلی حل معادله اساسی قبل، پیچیده هستند از بیان آنها صرف نظر نموده و تنها به رسم نتایج عددی آن بسنده می‌نماییم. از معیار تلاقی^۵ برای محاسبه میزان درهم‌تنیدگی بین اتم‌ها استفاده می‌نماییم. تلاقی برای یک ماتریس چگالی به صورت زیر تعریف می‌شود [۸].

$$C(\rho) = \max(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}, 0), \quad (۱۵)$$

که در آن $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ ویژه‌مقادیر ماتریس $\rho\tilde{\rho}$ هستند که

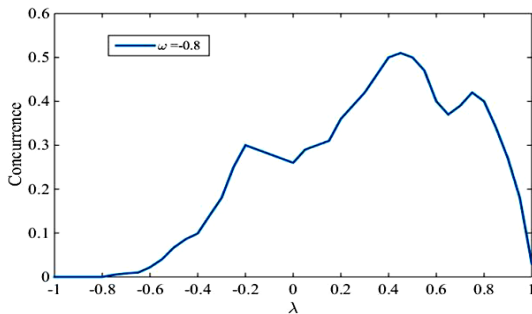
$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*(\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (۱۶)$$

تغییرات درهم‌تنیدگی پایا برای این سامانه در دو وضعیت بدون حضور پس خوراند و در حضور پس خوراند به ترتیب در شکل‌های (۱) و (۲) بر حسب قدرت میدان خارجی و قدرت پس خوراند اعمالی رسم شده است. نتایج در شکل (۱) نشان می‌دهند که بیشینه درهم‌تنیدگی به ازای $\omega = \pm 0.4$ تنها به اندازه ۱۱٪ است. و این درحالی است که در حضور پس خوراند، همانطور که نتایج شکل (۲) نشان می‌دهند، افزایش میزان درهم‌تنیدگی تا مقدار ۳۳٪ به ازای $\omega = \pm 0.8$ به دست می‌آید.



شکل ۱: تغییرات درهم‌تنیدگی پایا بر حسب قدرت میدان خارجی ω در عدم حضور پس خوراند کوانتومی.

این معادله به روش عددی به همراه f تعریف شده در رابطه (۲۱) حل می‌شود. معادله فوق به روش انتگرال اویلر و با میانگین‌گیری بر روی تعداد ۱۰۰۰ نوبه تصادفی انجام شده است. درهم‌تنیدگی پایا بین دو کیوبیت به ازای $\omega = -0.8$ برحسب قدرت پس‌خوراند اعمالی در شکل (۳) نشان داده شده است. میزان درهم‌تنیدگی با استفاده از این نوع پس‌خوراند از پس‌خوراند مارکوفی بیشتر است.



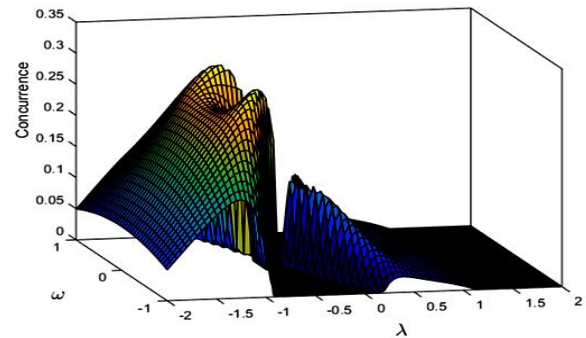
شکل ۳: تغییرات درهم‌تنیدگی پایا برحسب قدرت پس‌خوراند بیزین λ ، به‌ازای $\omega = -0.8$.

نتیجه‌گیری

سامانه کوانتومی شامل دو کیوبیت غیربرهمکنشی که در یک محیط مشترک اتلاف‌گر هستند، دارای درهم‌تنیدگی پایا ناشی از اثر محیط مشترک است. با استفاده از اندازه‌گیری هموداین می‌توان مشاهده‌پذیرهایی را از این سامانه با دقت مناسبی اندازه‌گیری نمود. از این اندازه‌گیری در بکار بردن پس‌خوراند کوانتومی بر روی سامانه استفاده می‌شود. نتایج محاسبات مربوط به دینامیک این سامانه به همراه پس‌خوراند نشان می‌دهند که استفاده از پس‌خوراند مارکوفی میزان درهم‌تنیدگی پایا را در این سامانه افزایش می‌دهد. علاوه بر آن این میزان از درهم‌تنیدگی را می‌توان با استفاده از پس‌خوراند بیزین نیز افزایش داد.

مراجع

- [1] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [2] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, H. Zbinden, Rev. Mod. Phys. **74**, 145 (2002).
- [3] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Nature **390**, 575 (1997).
- [4] J. M. Shapiro et al., J. Opt. Soc. Am. B **4**, 1604 (1987).
- [5] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **47**, 642 (1993).
- [6] H. M. Wiseman, Stefano Mancini, Jin Wang, Phys. Rev. A **66**, 013807 (2002).
- [7] J. Wang, H. M. Wiseman, and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **71**, 042309 (2005).
- [8] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. **80**, 2245 (1998).



شکل ۲: تغییرات درهم‌تنیدگی پایا برحسب قدرت میدان خارجی ω و قدرت پس‌خوراند مارکوفی λ .

۴- پس‌خوراند بیزین

در این حالت اندازه و علامت قدرت پس‌خوراند در هامیلتونی آن به حالت سامانه در لحظه پیش از اعمال پس‌خوراند وابسته است، به‌گونه‌ای که هامیلتونی پس‌خوراند به‌صورت زیر بیان می‌شود [۸].

$$H_{fb} = f(\rho)\Sigma^y, \quad (17)$$

که در آن $f(\rho)$ تابعی اختیاری از حالت سامانه است و به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که تابع هزینه $cf=1-F$ را کمینه نماید. در اینجا

$$F = \text{Tr}(\rho\Pi), \quad (18)$$

که $\Pi = (|1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|)/\sqrt{2}$ عملگر تصویر به فضای با بیشینه درهم‌تنیدگی است. تحول زمانی F تحت هامیلتونی پس‌خوراند عبارت است از

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \text{Tr}(-i[H_{fb}, \rho]\Pi) = -i f \text{Tr}([\Sigma^y, \Pi]\rho) \\ &= f \text{Tr}(Y\rho), \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

ضریب قدرت بهینه پس‌خوراند در هر لحظه با بیشینه کردن تابع $\dot{F}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$f(t) = \lambda \text{sgn} \{ \text{Tr}(Y\rho) \}, \quad (21)$$

که در آن λ همانند قبل اندازه ثابت قدرت پس‌خوراند کوانتومی است. با توجه به هامیلتونی پس‌خوراند تعریف شده، معادله تصارفی حاکم بر تحول حالت سامانه به صورت زیر است.

$$d\rho = \{-i\alpha[\Sigma^y, \rho] + D[\Sigma]\rho - i f[\Sigma^y, \rho]\}dt + H[\Sigma]\rho dw(t) \quad (22)$$