بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

فاز هندسی سامانه اپتومکانیکی مجهز به اتم در رژیم برهم کنش قوی

علی مهدی‌فر، احسان عموقربان و پروین رحیمی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهرکرد

چکیده – امروزه سامانه های اپتومکانیکی حاوی اتم در بسیاری از زمینه های فیزیک نظری و تجربی کاربرد فراوانی یافته اند. سردسازی لیزری اتم یا یون به دام افتاده درون کاواک، بهبود اندازه گیری طیف اتمی از جمله این کاربردها هستند. در این مقاله، با توجه به مزیتهای فاز هندسی در کاربردهایی از قبیل محاسبات کوانتومی، به محاسبه فاز هندسی برای سامانه های اپتومکانیکی مجهز به اتم می-پردازیم. تحقیق حاضر را می توان نخستین گام به سوی استفاده از سامانه های اپتومکانیکی در محاسبات کوانتومی با استفاده از فاز هندسی سامانه های مزبور به حساب آورد.

کلید واژه- سامانه اپتومکانیکی، فاز هندسی

Geometric phase of an atom assisted optomechanical system

Ali Mahdifar, Ehsan Amooghorban, and Parvin Rahimi

Physics group, Department of Physics, University of   Shahrekord, Shahrekord

Abstract- Atom assisted optomechanical systems have so applications in theoretical and experimental physics. Laser cooling of trapped atoms or ions, improving the measurement of atomic spectra are some of these applications. In this paper, with respect to the advantages of the geometric phase in the quantum computation, we calculate the geometric phase for these systems. This paper can be considered as the first step to use assisted optomechanical systems in quantum computation by using their geometric phase.

Keywords: geometric phase, optomechanical system

۱- مقدمه

یکی از پرکاربرد ترین سامانه های موجود در حوزه اپتیک کوانتومی، سامانه های اپتومکانیکی هستند. یک نوع از این سامانه ها از یک کاواک معمولی تشکیل شده است که یکی از آینه های آن قابلیت جابجایی داشته و فشار تابشی میدان درون کاواک منجر به حرکت آینه متحرک می‌شود. سامانه های مزبور، سامانه هایی بنیادی و اساسی در اپتیک کوانتومی بوده و کاربردهای وسیعی در پژوهش های اپتیک کوانتومی یافته اند.

از طرف دیگر می دانیم که با تحول یک سامانه کوانتومی، بردار حالت آن از $|\psi\rangle$ به $e^{i\varphi}|\psi\rangle$ تبدیل می‌شود. فاز φ علاوه بر یک قسمت دینامیکی از یک قسمت دیگر نیز تشکیل شده که این قسمت فاز هندسی نامیده می‌شود. از زمان کشف این فاز توسط بری در سال ۱۹۸۴ این فاز توجه زیادی را در بسیاری از زمینه ها به خود جلب کرده است. از جمله این کاربردها می‌توان به استفاده از فاز مزبور در محاسبات کوانتومی هندسی اشاره کرد. نشان داده شده است که از فاز هندسی می توان به عنوان گیت کوانتومی تغییر فاز استفاده نمود. مزیت استفاده از فاز هندسی در محاسبات کوانتومی، هندسی محض بودن آن است که سبب مقاوم شدن فاز هندسی در برابر برخی از منابع نوفه می شود [۱].

در این مقاله، با توجه به مزیتهای استفاده از فاز هندسی در محاسبات کوانتومی و به عنوان نخستین گام به سوی استفاده از سامانه های اپتومکانیکی در گیتهای کوانتومی، فاز هندسی سامانه های اپتومکانیکی مجهز به اتم را بدست می آوریم.

۲- فاز هندسی

برای سامانه ای با دوره تناوب τ که بردار حالت آن در لحظه t به صورت $|\psi(t)\rangle$ است، داریم:

$$|\psi(\tau)\rangle = e^{i\varphi}|\psi(0)\rangle \qquad (1)$$

فاز هندسی این سامانه با استفاده از رابطه

$$\gamma = i\int_0^{\tau} \langle\tilde{\psi}(t)|\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle dt \qquad (2)$$

محاسبه می‌شود[۲] ، که در آن $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-if(t)}|\psi(t)\rangle \qquad (3)$$

و $f(t)$ نیز در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$f(\tau) - f(0) = \varphi \qquad (4)$$

حالت یک سامانه در مکانیک کوانتومی با بردار حالت $|\psi\rangle$مشخص می‌شود. اگر بردار حالت $|\psi\rangle$ بیانگر اطلاعاتی راجع به مشاهده پذیرهای سامانه باشد، بردار $c|\psi\rangle$، که c یک عدد مختلط است نیز حاوی همان اطلاعات است. مجموعه تمام بردار حالت هایی که از ضرب بردار حالت $|\psi\rangle$ در تمام اعداد مختلط ساخته می-شوند، اصطلاحا پرتو نامیده می‌شود. بنابراین تمام بردار حالت هایی که روی یک پرتو قرار دارند، مشخص کننده یک حالت فیزیکی هستند. مجموعه تمام این پرتوها، فضایی را می‌سازند که این فضا، فضای هیلبرت برافکنشی نامیده می‌شود .

۳- سامانه اپتومکانیکی مجهز به اتم

وجود سامانه اتمی درون کاواک اپتومکانیکی نتایج فیزیکی مهمی دربردارد که از جمله آن‌ها می‌توان تقویت برهم کنش بین زیرسامانه های سه تایی آینه، اتم و میدان درون کاواک را نام برد. بررسی این سامانه ها در دو رژیم جفت شدگی ضعیف و قوی انجام می‌شود. در شرایطی که شدت جفت شدگی سه گانه اتم، آینه و میدان در مقایسه با بسامد میدان درون کاواک خیلی قوی‌تر باشد، از این جفت شدگی نمی‌توان صرف نظر کرد. این وضعیت با عنوان رژیم برهم کنش قوی شناخته می‌شود.

ما در این پژوهش به بررسی فاز هندسی سامانه های اپتومکانیکی مجهز به اتم در رژیم برهم کنش قوی می-پردازیم. بدین منظور ابتدا هامیلتونی این سامانه را بدست می‌آوریم.

در رژیم برهم کنش قوی و با اعمال تبدیل امواج چرخان، هامیلتونی این سامانه به صورت زیر نوشته می‌شود [۳] :

$$H \approx \omega_0 \hat{a}^+\hat{a} + \omega_m \hat{b}^+\hat{b} - \xi(\hat{b}+\hat{b}^+)\hat{a}^+\hat{a} \qquad (5)$$

$$+\omega_e \hat{s}_z + [g\hat{a}\hat{s}_+ + \eta(\hat{b}+\hat{b}^+)\hat{a}\hat{s}_+ + h.c.].$$

که در آن ω_0، ω_m و ω_e به ترتیب بسامد نوسانات میدان، آینه و اتم، $\hat{a}$ و $\hat{b}$ به ترتیب عملگرهای نابودی میدان و آینه و $\hat{s}_z$ و $\hat{s}_+$ نیز عملگرهای اسپینی هستند. ضریب برهم کنش اتم و میدان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g = -\mu\varepsilon \sin kx_0 \quad (6)$$

که در آن μ بیانگر گشتاور دوقطبی الکتریکی است. جمله $\xi(\hat{b}+\hat{b}^+)\hat{a}^+\hat{a}$ معرف برهم کنش آینه و میدان یا درواقع همان فشار تابشی است. ضریب ξ برابر $\frac{\omega_0}{l_0\sqrt{2M\omega_m}}$ است که M جرم آینه است. جمله $\eta(\hat{b}+\hat{b}^+)\hat{a}\hat{s}_+$ نیز بیانگر برهم کنش سه گانه اتم، آینه و میدان است که ضریب η برابر $\frac{\eta'\mu}{\sqrt{2M\omega_m}}$ است.

با توجه به شکل هامیلتونی، عملگر $\hat{a}^+\hat{a}+\hat{s}_z$ با هامیلتونی جابجا می‌شود. بنابراین می‌توان برای این سامانه زیرفضای پایدار $\{|n_a,e\rangle,|n_a+1,g\rangle\}$ را تعریف کرد، که $|n_a,e\rangle$ بیانگر حالتی است که اتم درون حالت برانگیخته e و میدان حاوی n_a فوتون باشد. در چنین حالتی می‌توان هامیلتونی را به صورت زیر نوشت:

$$H_{n_a} = h(\hat{b},\hat{b}^+) + H'_{n_a} \quad (7)$$

که در آن داریم:

$$h(\hat{b},\hat{b}^+) = \omega_e + \omega_0 n_a + \omega_m \hat{b}^+\hat{b} - \xi n_a(\hat{b}+\hat{b}^+) \quad (8)$$

$$H'_{n_a} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta-\xi(\hat{b}+\hat{b}^+)}{\sqrt{n_a+1}} & g-n_a(\hat{b}+\hat{b}^+) \\ g-n_a(\hat{b}+\hat{b}^+) & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

در این رابطه Δ بیانگر وادنیدگی بین اتم و فوتون و برابر $\omega_0-\omega_e$ است. زمانی که بین ضرایب جفت شدگی سامانه رابطه زیر برقرار باشد

$$g\xi = \eta\Delta \quad (10)$$

می‌توانیم H'_{n_a} را به صورت زیر تجزیه کنیم:

$$H'_{n_a} = f(\hat{b},\hat{b}^+)M_{n_a} \quad (11)$$

که در آن $f(\hat{b},\hat{b}^+)$ و M_{n_a} به صورت زیر تعریف شده اند:

$$f(\hat{b},\hat{b}^+) = \Delta - \xi(\hat{b}+\hat{b}^+) \quad (12)$$

$$M_{n_a} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{n_a+1}\,\eta/\xi \\ \sqrt{n_a+1}\,\eta/\xi & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

با قطری کردن این ماتریس ویژه حالت ها و ویژه مقادیر هامیلتونی کل بدست می‌آیند. ویژه حالت های این سامانه به صورت حاصل ضرب تانسوری حالت های پوشیده اتم-میدان و حالت آینه هستند:

$$|\psi\rangle_j = |jn_a\rangle \otimes |n_b\rangle_{jn_a} \qquad j=1,2 \quad (14)$$

حالت اتم-میدان برابر

$$|1n_a\rangle = \cos\theta_{n_a}|n_a+1,g\rangle + \sin\theta_{n_a}|n_a,e\rangle \quad (15)$$

و

$$|2n_a\rangle = -\sin\theta_{n_a}|n_a+1,g\rangle + \cos\theta_{n_a}|n_a,e\rangle \quad (16)$$

است که ضرایب $\sin\theta_{n_a}$ و $\cos\theta_{n_a}$ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$\tan\theta_{n_a} = \frac{2\eta\sqrt{n_a+1}}{\xi(1\pm R_{n_a})} \quad (17)$$

در این رابطه ضریب R_{n_a} به صورت

$$R_{n_a} = \sqrt{1+\frac{4\eta^2(n_a+1)}{\xi^2}} \quad (18)$$

تعریف شده است. حالت آینه نیز از جابجایی حالت های عددی میدان بدست می‌آید:

$$|n_b\rangle_{jn_a} = D_b(\alpha_{jn_a})|n_b\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n_b!}}(\hat{b}^+ - \alpha_{jn_a})^{n_b} D_b(\alpha_{jn_a})|0\rangle \quad (19)$$

که در این رابطه α_{jn_a} و عملگر جابجایی $D_b(\alpha_{jn_a})$ به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\alpha_{jn_a} = \frac{\xi}{2\omega_m}(2n_a + (-1)^j R_{n_a} + 1) \quad (20)$$

$$D_b(\alpha_{jn_a}) = e^{[\alpha_{jn_a}(\hat{b}^+ - \hat{b})]} \quad (21)$$

در ادامه به محاسبه فاز هندسی می‌پردازیم.

۴- فاز هندسی سامانه اپتومکانیکی

رابطه (۲) را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد[۴] :

$$\gamma = i\oint \langle\tilde{\psi}|\nabla_R|\tilde{\psi}\rangle .dR \tag{22}$$

در این رابطه R بیانگر مجموعه پارامترهای سامانه است که در مورد این سامانه این پارامترها زوایای θ و φ هستند. در این حالت رابطه بالا به شکل زیر در می‌آید:

$$\gamma = i\oint [\langle\tilde{\psi}|\frac{\partial}{\partial\theta}|\tilde{\psi}\rangle d\theta + \langle\tilde{\psi}|\frac{\partial}{\partial\varphi}|\tilde{\psi}\rangle d\varphi] \tag{23}$$

هم چنین $\langle\tilde{\psi}|$ نیز با اعمال تبدیل زیر روی $\langle\psi|$ بدست می‌آید [۵] :

$$|\tilde{\psi}\rangle = u(\theta,\varphi)|\psi\rangle = e^{-i\varphi\hat{J}_z} e^{-i\theta\hat{J}_y}|\psi\rangle \tag{24}$$

که در این رابطه عملگرهای $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$ به عملگرهای شوینگر معروف هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{a}^+\hat{a} - \hat{b}^+\hat{b}) \quad \hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{a}^+\hat{b} - \hat{a}\hat{b}^+) \tag{25}$$

برای محاسبه فاز هندسی عبارت های زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\langle\psi_j|u^+(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}u(\theta,\varphi)|\psi_j\rangle = -i\langle\psi_j|\sin\theta\hat{J}_x + \cos\theta\hat{J}_z|\psi_j\rangle \tag{26}$$

$$\langle\psi_j|u^+(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta}u(\theta,\varphi)|\psi_j\rangle = -i\langle\psi_j|\sin\theta\hat{J}_x + \cos\theta\hat{J}_y|\psi_j\rangle \tag{27}$$

با محاسبه ارزش انتظاری عملگرهای $\hat{J}_x$ و $\hat{J}_y$ و $\hat{J}_z$ روی ویژه حالت ها و هم چنین استفاده از رابطه (۲۳) ، فاز هندسی متناظر با هرکدام از ویژه حالت ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\gamma_1 = \frac{\Omega}{2}[n_a - n_b + \cos^2\theta_n - \alpha^2_{1n_a}] \tag{28}$$

$$\gamma_2 = \frac{\Omega}{2}[n_a - n_b + \sin^2\theta_n - \alpha^2_{2n_a}] \tag{29}$$

که در این رابطه Ω زاویه فضایی محصور شده توسط بردار حالت $\langle\psi|$ روی فضای برافکنشی است.

همان گونه که از روابط بالا مشخص است فاز هندسی علاوه بر وابستگی به کمیت های کوانتومی سامانه اپتومکانیکی مانند تعداد فوتونهای میدان، تعداد برانگیختگی های آینه متحرک و وادنیدگی اتم-میدان، از طریق θ_n(تعریف شده در رابطه ۱۸) و α_{jn_a}(تعریف شده در رابطه ۲۰) به پارامترهای کلاسیکی سامانه همچون طول، جرم و بسامد کاواک و بسامد آینه وابسته است. از اینرو (همان گونه که در مقدمه نیز اشاره گردید) با توجه به ایده استفاده از فاز هندسی سامانه های اپتومکانیکی مجهز به اتم در گیت های کوانتومی تغییر فاز، امکان مهندسی و کنترل فاز مورد نظر در تجربه از طریق پارامترهای متعدد بالا به سهولت امکان پذیر خواهد بود.

علاوه بر این، به سادگی دیده می شود که فازهای هندسی بدست آمده حتی با فرض عدم وجود میدان در کاواک (حالت خلا کوانتومی با $n_a = 0$) و با فرض اینکه حالت ارتعاشی آینه نیز در حالت پایه (با $n_b = 0$) باشد، فاز هندسی در سامانه های اپتومکانیکی مجهز به اتم غیرصفر است. به عبارت دیگر، فاز هندسی القا شده توسط خلا در سامانه های مزبور وجود دارد.

سپاسگزاری

از حمایت معاونت تحصیلات تکمیلی دانشگاه شهرکرد تشکر می‌کنیم.

مراجع

[۱] A. Ekert, M. Ericsson, P. Hayden, H. Inamori, J. A. Jones, D. K. L. oi, V. Vedral, *Geometric quantum computation*, **Journal of Modern Optics, ۴۷, ۲۵۰۱-۲۵۱۳** (۲۰۰۰).

[۲] Y. Aharonov and J. S. Anandan, *Phase change during a cyclic quantum evolution*, **Phys. Rev. Lett** ۵۸ (۱۹۸۷).

[۳] Y. Chang, H. Ian, C. P. Sun, *Triple coupling and parameter resonance in quantum optomechanics with a single atom*, **J. Phys. B**: At. Mol. Opt. Phys. ۴۲ (۲۰۰۹).

[۴] M. O. Scully, and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press (۱۹۹۷).

[۵] I.Guridi, A.Carollo, S,Bose, V.Vedral, *Vacuum indused spin ۱/۲ Berry's phase*, **Phys. Rev. Lett** ۸۹ (۲۰۰۲).