دوربری ناهم‌خوانی کوانتومی

سحر حافظ آبادیان[۱]، حمیدرضا محمّدی خشوئی[۱و۲]

[۱]گروه فیزیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

[۲] گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، دانشگاه اصفهان، اصفهان

چکیده–دوربری ناهم‌خوانی کوانتومی یک حالت دو قسمتی با یک کانال هم‌بسته کوانتومی در نظر گرفته شده است. ناهم‌خوانی کوانتومی حالت خروجی برای یک حالت ورودی خالص از طریق یک کانال کوانتومی با حالت ورنر دو کیوبیتی، محاسبه شده است. نتایج بیان می‌دارند که کانال با هم‌بستگی کوانتومی بیشتر، ناهم‌خوانی کوانتومی بیشتری را حفظ می‌کند.

کلید واژه- حالت‌های خالص، درهم‌تنیدگی، دوربری ناهم‌خوانی کوانتومی، کانال واقطبش تعمیم یافته، ناهم‌خوانی کوانتومی.

Quantum discord teleportation

S. Hafez Abadian[1], H. Mohammadi[1,2]

[1]Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan

[2]Quantum Optics research group, University of Isfahan, Isfahan

Abstract-Quantum discord teleportation of a bipartite state via a quantum correlated channel is considered. Quantum discord of output state is calculated, for a pure input state and a two-qubit Werner state as a channel. The results reveal that, more quantum correlated channel preserves more quantum discord.

Keywords: Pure states, Entanglement, Quantum discord teleportation, General depolarizing channel, Quantum discord.

۱- مقدمه

اطلاعات متقابل، سنجه‌ای برای اندازه‌گیری همبستگی‌های کل یک سامانه کوانتومی است. دو تعریف معادل اطلاعات متقابل در نظریه کلاسیک به صورت زیر است.

$$J(A:B) = H(\mathrm{A}) - \mathrm{H}(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B}), \qquad (۱)$$

$$\mathrm{I}(A:B) = H(\mathrm{A}) + \mathrm{H}(\mathrm{B}) - \mathrm{H}(\mathrm{A},\mathrm{B}). \qquad (۲)$$

که $H(\mathrm{A(B)})$ آنتروپی شانون[۱] مربوط به زیر سامانه A(B) و $H(\mathrm{A},\mathrm{B})$ آنتروپی توأم A و B و $H(\mathrm{A}\,|\,\mathrm{B})$ آنتروپی شرطی است. نسخه کوانتومی اطلاعات متقابل رابطه (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$I(\rho_{A:B}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \qquad (۳)$$

که $S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho Log_2 \rho)$ آنتروپی فون‌نویمن[۲] و $\rho_{A(B)} = Tr_{B(A)}(\rho_{AB})$ عملگر چگالی کاهش یافته بخش $A(B)$ است. اما تعمیم رابطه (۱) به نسخه‌ی کوانتومی به این راحتی صورت نمی‌گیرد زیرا تعریف $S(\rho_{A|B})$ مستلزم این است که حالت A را به شرط این‌که حالت B را بدانیم، تعیین کنیم. چنین عبارتی در نظریه کوانتومی مبهم است، مگر اینکه حالت B را با کامل‌ترین اندازه‌گیری روی آن تعیین کرده باشیم.فرض کنید یک اندازه‌گیری کامل روی B توسط تصویرگرهای یک بعدی π_i^B انجام می‌دهیم. چنان‌چه j امین خروجی را داشته باشیم، حالت بعد از اندازه‌گیری روی زیر سامانه برابر $\rho_{A|\Pi_j^B} = \dfrac{\Pi_j^B \rho_{A,B} \Pi_j^B}{p_j}$ می‌شود که این خروجی با احتمال $p_j = Tr_{A,B}(\Pi_j^B \rho_{A,B})$ حاصل می‌شود. حال می‌توان آنتروپی شرطی را به صورت $S(\rho_{A|\{\Pi_j^B\}}) = \sum_j p_j S(\rho_{A|\Pi_j^B})$ تعریف کرد. با این تعریف، J را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathrm{J}(\rho_{A:B})_{\{\Pi_j^B\}} = S(\rho_A) - S(\rho_{A|\{\Pi_j^B\}}). \qquad (۴)$$

زورک[۳] اختلاف بین دو تعریف (۳) و (۴) را ناهم‌خوانی کوانتومی[۴] نامید که به صورت زیر بیان می‌شود[۱].

$$\mathrm{Q}(\rho_{A,B}) \equiv I(\rho_{A:B}) - \underset{\{\Pi_j^B\}}{Max}\, \mathrm{J}(\rho_{A:B})_{\{\Pi_j^B\}}. \qquad (۵)$$

در حقیقت میزان همبستگی‌های کلاسیک نهفته در زیر سامانه‌های A و B برابر با $\mathrm{C}(\rho_{A,B}) \equiv \underset{\{\Pi_j^B\}}{Max}\, \mathrm{J}(\rho_{A:B})_{\{\Pi_j^B\}}$ است. بدین ترتیب ناهم‌خوانی کوانتومی از اختلاف بین همبستگی‌های کل و همبستگی‌های کلاسیکی در یک سامانه‌ی دو بخشی تعریف می‌شود. برای سامانه‌های دو کیوبیتی با حالت X به صورت

$$\rho_x = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \qquad (۶)$$

طبق[۲, ۳] همبستگی کلاسیکی و ناهم‌خوانی کوانتومی به ترتیب، به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned} C(\rho_x) &= H(\rho_{11} + \rho_{22}) - \min(D_1, D_2), \\ Q(\rho_x) &= H(\rho_{11} + \rho_{33}) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{3} \lambda_i^x \log_2 \lambda_i^x + \min(D_1, D_2). \end{aligned} \qquad (۷)$$

که $H(\mathrm{x}) = -\mathrm{x}\log_2 x - (1-\mathrm{x})\log_2(1-x)$ و

$$D_1 = H(\tau), \mathrm{D}_2 = -\sum_{l=1}^{4} \rho_{ll} \log_2 \rho_{ll} - H(\rho_{11} + \rho_{33}),$$

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{[1 - 2(\rho_{33} + \rho_{44})]^2 + 4\alpha^2(|\rho_{14}| + |\rho_{23}|)^2}}{2}.$$

در این مقاله تحول ناهم‌خوانی کوانتومی را تحت عملیات دوربری[۵] کوانتومی محاسبه می‌کنیم. بدین معنی که آلیس[۶] یک حالت هم‌بسته دو قسمتی کوانتومی با میزان ناهم‌خوانی مشخص در دست دارد و می‌خواهد آن را از

[۱] Shannon entropy

[۲] Von Neumann entropy

[۳] Zurek

[۴] Quantum discord

[۵] teleportation

[۶] Alice

طریق یک کانال کوانتومی (که خود یک سامانه دو قسمتی کوانتومی درهم‌تنیده[۷] است) برای باب[۸] ارسال نماید. عملیات دوربری کوانتومی حالت قطبش نور توسط زایلینگر[۹] و همکارانش به صورت تجربی انجام پذیرفته است[۴]. سؤال اینجاست که اگر حالت کانال یک حالت آمیخته باشد، ناهم‌خوانی کوانتومی تحت این عمل چگونه تغییر می‌کند؟ و آیا می‌توان با کنترل تحول توسط دستکاری کانال و حالت اولیه، ناهم‌خوانی کوانتومی را تحت این عمل بیشتر حفظ نمود یا نه؟

۲- محاسبات و نتایج

در این مقاله به ازای حالت اولیه خالص زیر، اثر دوربری ناهم‌خوانی کوانتومی را بررسی می‌کنیم.

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|00\rangle + e^{i\phi}\sin(\frac{\theta}{2})|11\rangle. \qquad (۸)$$

و $0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi$ است. حالت کانال را یک حالت ورنر[۱۰] دو کیو بیتی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\rho_{\text{ch}} = \lambda|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (\frac{1-\lambda}{4})I, \quad (0 \le \lambda \le 1). \qquad (۹)$$

که $|\Psi^-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$ حالت بل[۱۱] و I عملگر واحد[۱۲] است. بون[۱۳] و بوز[۱۴] نشان دادند که می‌توان دوربری استاندارد حالت‌های آمیخته دلخواه را توسط یک کانال واقطبش تعمیم یافته[۱۵] مدل‌سازی نمود. بنابراین حالت خروجی (حالت در دست باب) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\rho_{\text{out}} = \sum_{\mu,\nu} p_{\mu\nu}(\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu)\rho_{\text{in}}(\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu) \qquad (۱۰)$$

[۷]Entangled
[۸]Bob
[۹]Zeilinger
[۱۰]Werner state
[۱۱]Bell state
[۱۲]Identity operator
[۱۳]Bowen
[۱۴]Bose
[۱۵]General depolarizing channel

و $\mu,\nu = 0,x,y,z$ ، $p_{\mu,\nu} = \mathrm{tr}(E^{\mu}\rho_{ch})\,\mathrm{tr}(E^{\nu}\rho_{ch})$، بطوری‌که $\sum_{\mu,\nu} p_{\mu,\nu} = 1$ و

$$E^0 = |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|, \qquad E^1 = |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|$$
$$E^2 = |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|, \qquad E^3 = |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|,$$

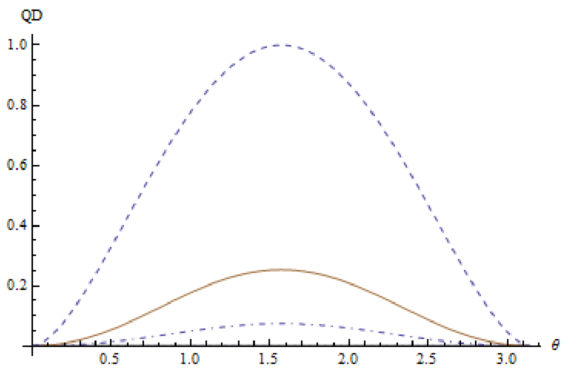
که $|\Psi^\pm\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}$ و $|\Phi^\pm\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$ حالت‌های بل هستند. بنابراین برای حالت اولیه خالص(۷) با کانال ورنر(۸)، حالت خروجی طبق رابطه (۹) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho_{\text{out}} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & m \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ m^* & 0 & 0 & l \end{pmatrix}, \qquad (۱۱)$$

که عناصر این ماتریس برابرند با

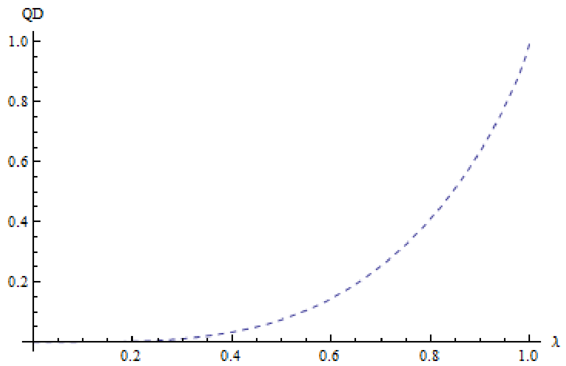
$$\begin{aligned} n &= (\frac{1-\lambda}{2})^2\sin^2(\frac{\theta}{2}) + (\frac{1+\lambda}{2})^2\cos^2(\frac{\theta}{2}), \\ k &= (\frac{1}{4})(1-\lambda^2), \quad m = (\frac{1}{2})e^{-i\phi}\lambda^2\sin(\theta), \\ l &= (\frac{1-\lambda}{2})^2\cos^2(\frac{\theta}{2}) + (\frac{1+\lambda}{2})^2\sin^2(\frac{\theta}{2}). \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

در شکل ۱ تغییرات ناهم‌خوانی کوانتومی به ازای λهای متفاوت نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که ناهم‌خوانی کوانتومی به ازای هر ϕ دلخواه در $\theta = \frac{\pi}{2}$، بیشینه مقدار را دارد.



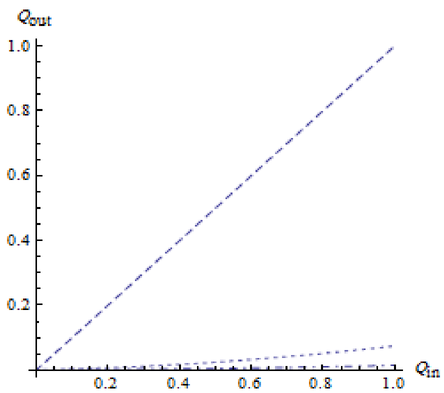
شکل ۱. تغییرات ناهم‌خوانی کوانتومی تحت کانال واقطبش تعمیم یافته نسبت به θ. منحنی خط-چین به ازای λ=۱ ،خط تیره به ازای λ=۰,۷ و نقطه خط- چین به ازای λ=۱/۲ رسم شده است.

در شکل ۲ اثر کانال را بر روی ناهم‌خوانی کوانتومی بررسی می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش λ ناهم‌خوانی کوانتومی افزایش می‌یابد. یعنی هرچه حالت کانال به حالت بل نزدیکتر می‌شود، این کانال برای انتقال ناهم‌خوانی کارآمدتر است.



شکل ۲. تغییرات ناهم‌خوانی کوانتومی تحت کانال واقطبش تعمیم یافته نسبت به λ، به ازای $\phi=0$ و $\theta=\frac{\pi}{2}$.

در شکل ۳ ناهم‌خوانی حالت خروجی Q_{out} را بر حسب حالت ورودی Q_{in} به ازای حالت‌های مختلف کانال رسم نموده‌ایم.



شکل ۳. ناهم‌خوانی حالت خروجی Q_{out} بر حسب ناهم‌خوانی حالت ورودی Q_{in} به ازای ورودی‌های $\phi=0$ و $0\le\theta\le\pi$ که منحنی خط-چین به ازای λ=۱ و نقطه چین به ازای λ=۱/۲ و نقطه خط-چین به ازای λ =۰,۳۲ نشان داده شده است..

شکل ۳ نشان می‌دهد که Q_{out} به طور خطی با Q_{in} مرتبط است. شیب این خط با افزایش میزان درهم-تنیدگی کانال افزایش می‌یابد. به ازای $\lambda<1/3$ حالت کانال کاملاً جداپذیر[۱۶] است ولی میزان ناهم‌خوانی کانال صفر نیست ($Q_{ch}=0.13$). شکل بالا نشان می‌دهد که برای یک کانال جداپذیر برای برخی حالت‌های اولیه Q_{out} صفر نمی‌شود. مثلاً برای حالت اولیه با $\theta=\frac{\pi}{2}$ و $\phi=0$ و حالت کانال با $\lambda=0.32$ مقدار $Q_{\text{out}}=0.014$ بدست می‌آید. این امر نشان می‌دهد که منبع[۱۷] انتقال ناهم-خوانی، درهم‌تنیدگی نیست بلکه ناهم‌خوانی کانال به عنوان یک منبع عمل می‌کند. این نتیجه می‌تواند هزینه مخابرات کوانتومی را به شدت کاهش دهد. در حقیقت اگر بتوان از ناهم‌خوانی به عنوان منبع انتقال اطلاعات استفاده نمود، دیگر نیازی به تولید حالت‌های درهم‌تنیده برای انتقال اطلاعات کوانتومی نخواهیم داشت و این امر سبب کاهش قابل توجهی در هزینه سامانه‌های مخابرات کوانتومی خواهد شد.

نتیجه‌گیری

دوربری ناهم‌خوانی تحت کانال با حالت ورنر دو کیوبیتی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهند که با کنترل حالت کانال و همچنین آماده‌سازی حالت اولیه مناسب می‌توان عملیات دوربری ناهم‌خوانی را با بهره قابل قبولی انجام داد. همچنین نتایج بیان‌گر این موضوعند که می‌توان از ناهم‌خوانی کوانتومی به جای درهم‌تنیدگی به عنوان منبع انتقال اطلاعات استفاده نمود.

مراجع

[۱] Ollivier, H. and W.H. Zurek, Quantum discord: *a measure of the quantumness of correlations*. Physical Review Letters, ۲۰۰۱. ۸۸(۱): p. ۰۱۷۹۰۱.

[۲] Kheirandish, F., S.J. Akhtarshenas, and H. Mohammadi, *Effect of spin-orbit interaction on entanglement of two-qubit Heisenberg X Y Z systems in an inhomogeneous magnetic field*. Physical Review A, ۲۰۰۸. ۷۷(٤): p. ۰٤۲۳۰۹.

[۳] Bowen, G. and S. Bose, *Teleportation as a depolarizing quantum channel, relative entropy, and classical capacity*. Physical Review Letters, ۲۰۰۱. ۸۷(۲٦) : p. ۲٦۷۹۰۱.

[٤] Dakic, B., Ole Lipp, Y., Ma, X., Ringbauer, M., Kropatschek, S., Barz, S., Paterek, T., Vedral, V., Zeilinger, A., Brukner, C., Walther, P.: Nat. Phys. ۸, ٦٦٦ (۲۰۱۲).

[۱۶] Separable

[۱۷] Resource