



بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران  
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران  
۸ تا ۱۰ بهمن ماه ۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز



## بررسی اثر خصوصیات محیط بر درهمتنیدگی گرمایی فوتون-فوتون در یک نانوکاوک غیر خطی

شهلا علیزاده<sup>۱</sup>، رزا صفایی<sup>۲</sup> و محمد مهدی گلشن<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>بخش فیزیک دانشگاه شیراز

<sup>۲</sup>دانشکده فناوریهای نوین دانشگاه شیراز

چکیده - در این مقاله درهمتنیدگی گرمایی دو مُد فوتونی در یک نانوکاوک غیرخطی با استفاده از منفیت به عنوان سنجهای از آن، بررسی می‌شود. فرض می‌شود که فوتونها، گرمایی هستند و جفتیدگی در یک ماده دی‌الکتریک مرکز-تقارنی، بواسطه پذیرفتاری مرتبه اول و سوم روی می‌دهد. پس از محاسبه ویژه‌مقادیر و ویژه‌حالت‌های سیستم، ماتریس چگالی گرمایی و در نتیجه ویژه‌مقادیر منفی ماتریس ترانهاده جزئی بدست می‌آید. نتایج محاسبات حاکی از جداپذیر بودن دو مُد فوتونی در دمای صفر مطلق است. با افزایش دما، میزان درهمتنیدگی افزایش و پس از رسیدن به یک بیشینه قابل کنترل توسط پارامترهای محیط، بطور مجانبی به سمت صفر میل می‌کند.

کلید واژه- اثرات گرمایی، درهم تنیدگی، منفیت، محیط غیر خطی کر.

## Effects of medium characteristics on the properties of thermal photon-photon entanglement in a nonlinear nanocavity

Shahla Alizadeh<sup>1</sup>, Rosa Safaiee<sup>2</sup>, and Mohammad Mehdi Golshan<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Physics Department, Shiraz University, Shiraz, Iran

<sup>2</sup>Faculty of Advanced Technologies, Shiraz University, Shiraz, Iran

Abstract- In this paper we study the properties of photon-photon thermal entanglement occurring in a nonlinear optical cavity. The photons are thermally produced inside a nonlinear cavity that couples the two modes via first and third order susceptibilities. Diagonalizing the Hamiltonian of the system, the thermal density matrix and, consequently, the partially transposed one are obtained. The negative eigenvalues of the latter are then calculated, leading to the negativity as a measure of photon-photon entanglement. Our results show that the two photons are separable at absolute zero. As the temperature increases, the negativity exhibits a maximum whose value strongly depends on the medium characteristics and then asymptotically vanishes.

Keywords: Thermal Effects, Entanglement, Negativity, Kerr Nonlinear Medium.

## ۱- مقدمه

حالت‌های درهم‌تنیده نقش ویژه‌ای را در زمینه‌های مختلف پردازش اطلاعات کوانتومی مانند انتقال کوانتومی اطلاعات، محاسبات کوانتومی و موارد دیگر [۱-۴] ایفا می‌کنند. تحقیقات در زمینه درهم‌تنیدگی کوانتومی معمولاً بر روی دو مبحث ایجاد و اندازه‌گیری آن متمرکز شده است. یک روش برای ایجاد و بررسی درهم‌تنیدگی، کاواک الکترودینامیک کوانتومی می‌باشد [۵]. در این روش، برهم‌کنش کیوبیت‌های ماده با مُد اپتیکی کاواک برای درهم‌تنیدگی‌های اتم-اتم، اتم-فوتون یا فوتون-فوتون استفاده می‌شود [۶،۷]. برهم‌کنش فوتون-فوتون معمولاً در خلأ مورد مطالعه قرار می‌گیرد، اما برای کاربردهایی مانند سوئیچینگ اپتیکی [۸] و مدولاسیون [۹] وجود دی‌الکتریک داخل کاواک اجتناب‌ناپذیر است. از طرف دیگر وجود تابش حتی با فوتون‌های محدود نیز باعث تحریک جملات غیرخطی در برهم‌کنش‌ها می‌شود [۱۰]. از طرف دیگر بررسی این برهم‌کنش‌ها، اعم از خطی و غیرخطی، بطور معمول در دمای صفر مطلق (آنسامبل‌های خالص) انجام می‌گیرد. این در حالیست که سیستم در برهم‌کنش با محیط (به عنوان یک حمام گرمائی) تحت دمای T قرار داشته که این خود می‌تواند باعث درهم‌تنیدگی یا جداپذیری اعضای سیستم گردد. بنابراین هدف از مقاله حاضر بررسی درهم‌تنیدگی دو مُد فوتونی در یک کاواک غیرخطی مرکز-تقارنی در دمای T می‌باشد.

جفتیدگی فوتون-فوتون در یک محیط غیرخطی در اثر حضور دو عامل خودکنش-دگرکنش (غیرخطی) و برهم-کنش خطی فوتون-فوتون می‌باشد که می‌تواند درهم‌تنیدگی فوتون‌ها را تحت تأثیر قرار دهند. بنابراین برخلاف گزارش‌های قبلی که از عامل غیرخطی دگرکنش صرف‌نظر می‌شود [۱۱ و ۱۲]، در مقاله حاضر، بدون در نظر گرفتن هیچ‌گونه محدودیتی بر قدرت این عوامل، به طور ویژه اثر هر دو عامل غیرخطی را بر درهم‌تنیدگی گرمایی فوتون-فوتون بررسی می‌کنیم. بدین منظور با توجه به هامیلتونی دو مُد فوتونی با جفتیدگی‌های مذکور، یک عملگر کازیمیر که ویژه‌مقادیر آن برانگیختگی‌های سیستم را نشان می‌دهد و با کل هامیلتونی جابجا می‌شود، معرفی می‌گردد. با توجه به ویژه‌حالت‌های مشترک هامیلتونی و

این عملگر، دیده می‌شود که هامیلتونی قطعه-قطری، هر یک با ابعاد  $(n+1) \times (n+1)$ ، که در آن  $n$  معرف برانگیختگی سیستم است، خواهد بود. بدین ترتیب به راحتی می‌توان ویژه‌حالت‌های فوتونی همراه با ویژه‌مقادیر متناظر را محاسبه نمود، با توجه به آنکه فوتون‌های سیستم، گرمائی می‌باشند، هر حالت از آن با توزیع احتمال ماکسول-بولتزمن روی می‌دهد. بنابراین با استفاده از این توزیع احتمال، عملگر (ماتریس) چگالی به عنوان تابعی از دما بدست می‌آید. در ادامه، ماتریس ترانزفاده جزئی که خود بالا-مثلی است، محاسبه و از طریق ویژه-مقادیر منفی آن، سنجح منفیت برای دو مُد فوتونی حاصل خواهد شد. در اینجا خاطر نشان می‌شود که هر چند سنجح منفیت تنها برای سیستم‌های  $2 \times 2$  یا  $2 \times 3$  شرط لازم و کافی را تشکیل می‌دهد، باور عموم بر آن است که این سنجح در سیستم‌هایی با ابعاد بزرگتر نیز درهم‌تنیدگی و میزان آن را نشان می‌دهد [۱۳ و ۱۴ و ۱۵]. بررسی‌های ما نشان می‌دهد که حالت پایه سیستم غیردرهم‌تنیده است و بنابراین در دمای صفر مطلق منفیت دارای مقدار صفر می‌باشد و با افزایش دما به یک بیشینه و پس از آن به طور مجانبی به سمت صفر میل می‌کند. از نتایج مهم این گزارش آنست که میزان درهم‌تنیدگی گرمایی نسبت عکس با عوامل غیرخطی دگرکنش و خودکنش دارد.

## ۲- هامیلتونی سیستم

اگر برهم‌کنش دو مُد فوتونی در نانوکاواکی پرشده از یک ماده دی‌الکتریک مرکز تقارنی را در نظر بگیریم، هامیلتونی این سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = H_0 + H_{\text{nonl}} + H_{\text{int}} \quad (1)$$

$$\text{در معادله (۱) جمله } H_0 = \hbar \sum_{i=1}^2 \omega_i (a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2})$$

هامیلتونی مربوط به فوتون هاست که در آن  $\omega_i$  فرکانس مربوط به هر مُد فوتونی است، همچنین

$$H_{\text{nonl}} = \hbar \sum_{i=1}^2 \chi_i (a_i^\dagger)^2 a_i^2 + \hbar \bar{\chi} a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \quad (2)$$

نشان‌دهنده جفتیدگی غیرخطی و

$$H_{\text{int}} = \hbar \lambda (a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger) \quad (3)$$

نشان دهنده جفتیدگی خطی فوتون‌ها می‌باشد. در معادلات (۲) و (۳)،  $(a_i^\dagger)a_i$  عملگر نابودی (خلق) فوتون‌ها،  $\chi_i$ ،  $\bar{\chi}$  بترتیب پذیرفتاری مرتبه سوم وابسته به خودکنش و دگرکنش و  $\lambda$  جفتیدگی خطی بین فوتون‌ها را نشان می‌دهند. با توجه به هامیلتونی در معادله (۱) به راحتی می‌توان نشان داد برای عملگر  $N = \sum_{i=1}^2 a_i^\dagger a_i$  که ویژه مقادیر آن نشان دهنده تمامی برانگیختگی‌های سیستم می‌باشد،  $[H, N] = 0$ . اگر حالت‌ها بر اساس ویژه مقادیر عملگر  $N$  شماره گذاری شوند، نمایش ماتریسی معادله (۱) قطعه-قطری، هر یک با ابعاد  $(n+1) \times (n+1)$  می‌شود.

در بخش بعد از این هامیلتونی برای بدست آوردن عملگر چگالی گرمایی استفاده می‌شود.

### ۳- درهمتنیدگی گرمایی فوتون-فوتون در یک نانوکاوک غیرخطی

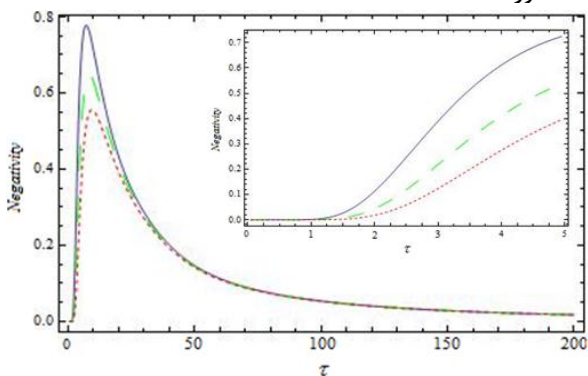
به منظور محاسبه درهمتنیدگی گرمایی فوتون-فوتون در یک نانوکاوک غیرخطی با استفاده از سنج منفیت، ابتدا ماتریس چگالی گرمایی سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho = \frac{1}{Z} \sum_{i=0}^n e^{-\beta E_i} |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (5)$$

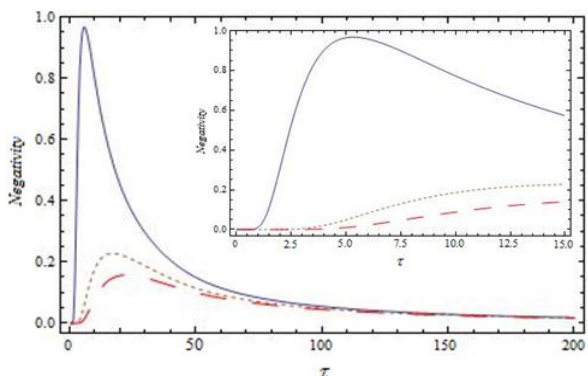
که در آن  $\{|\psi_i\rangle\}$  ویژه حالت‌ها و  $\{E_i\}$  ویژه مقادیر هامیلتونی،  $Z = \sum_{i=0}^n e^{-\beta E_i}$  تابع پارش سیستم و  $\beta = 1/k_B T$  است  $k_B$  ثابت بولتزمن و  $T$  دمای سیستم می‌باشد. سپس با جزئی ترانهاد کردن ماتریس چگالی گرمایی نسبت به یکی از زیر سیستم‌های فوتونی و محاسبه ویژه مقادیر آن، منفیت به عنوان سنج‌های از درهمتنیدگی،

$$N(T) = \sum_{i=1}^n \text{Max} \{0, -\lambda_i(T)\} \quad (6)$$

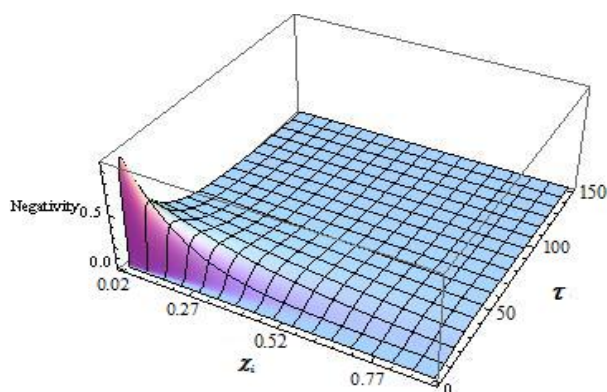
نتیجه خواهد شد. از آنجا که ماتریس ترانهاد جزئی دارای ابعادی نامتناهی می‌باشد، برای محاسبات عددی قطعاتی با ابعاد حداکثر  $50 \times 50$  در نظر گرفته شده است. به عبارت دیگر در ماتریس چگالی ترانهاد جزئی تا قطعه متناظر با برانگیختگی  $n = 49$  در نظر گرفته می‌شود. ابعاد فضای هیلبرت در این حالت به



شکل ۱: درهمتنیدگی گرمایی فوتون-فوتون به ازای  $\lambda = 1$  و مقادیر مختلف  $\chi_i$ ،  $\chi_i = 0.0$  (خط ممتد)،  $\chi_i = 0.06$  (خط چین) و  $\chi_i = 0.08$  (نقطه چین). شکل الحاقی رفتار درهمتنیدگی در دمای های کوچک را نشان می‌دهد.



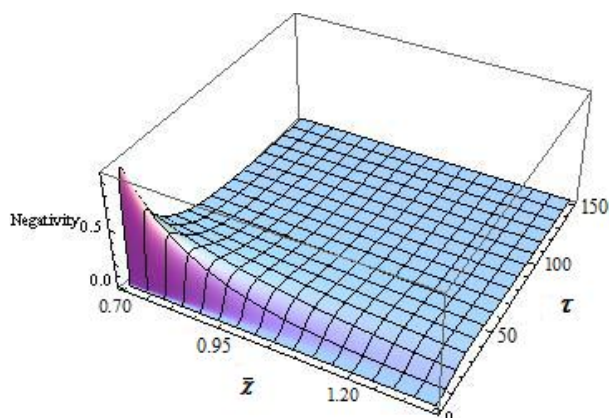
شکل ۲: نمودار درهمتنیدگی برحسب  $\tau$  برای سه مقدار مختلف  $\bar{\chi}$ :  $\bar{\chi} = 0.7$  (خط ممتد)،  $\bar{\chi} = 0.9$  (نقطه چین) و  $\bar{\chi} = 1$  (خط چین). شکل الحاقی رفتار درهمتنیدگی در دمای های کوچک را نشان می‌دهد.



شکل ۳: نمودار سه بعدی درهمتنیدگی براساس دما و عامل غیرخطی خودکنش.

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله اثر دما بر درهمتنیدگی فوتون-فوتون در یک نانوکاوک غیرخطی مورد مطالعه قرار گرفته است. محاسبات ما نشان می‌دهد که حالت پایه سیستم (در دمای صفر مطلق) یک حالت غیردرهمتنیده است. با افزایش دما و ظهور حالت‌های برانگیخته بالاتر درهمتنیدگی افزایش و بعد از گذشتن از یک بیشینه بطور مجانبی به سمت صفر میل می‌کند. از نتایج دیگر این مقاله آن است که مقدار بیشینه درهمتنیدگی و دمای مشخصه آن را می‌توان توسط عوامل غیرخطی خودکنش و دگرکنش کنترل کرد.



شکل ۴: نمودار سه بعدی درهمتنیدگی براساس دما و عامل غیرخطی دگرکنش.

#### مراجع

- [1] Olmschenk, S. et al, *Quantum teleportation between distant matter qubit*, Science, Vol. 323, pp. 486-491, 2009.
- [2] Raussendorf, R., and Briegel, H. J., *A one-way quantum computer*, Phys. Rev. Lett., Vol. 86, pp. 5188-5191, 2001.
- [3] Takeda, S., Mizuta, T. and Fuwa, M., *Generation and eight-port homodyne characterization of time-bin qubits for continuous-variable quantum information processing*, Phys. Rev. A, Vol. 87, 043803, 2013.
- [4] Schaibley, J. R., Burgers, A. P., McCracken, G. A., Duan, L.-M., Berman, P. R., Steel, D. G., Bracker, A. S., Gammon, D., Sham, L. J., Phys. Rev. Lett., Vol. 110, 167401, 2013.
- [5] Dong, Y. and Kuang, L.M., *Quantum entanglement between a double quantum dot and photons*, Phys. Lett. A, Vol. 367, pp. 40-46, 2007.
- [6] Foroozani, N., Golshan, M. M., and Mahjoei, M., *Properties of the localized field emitted from degenerate A-type atoms in photonic crystals*, Phys. Rev. A, Vol. 76, 015801, 2007.
- [7] Ritter, S., Nöelleke, C., Hahn, C., Reiserer, A., Neuzner, A., Uphoff, M., Mücke, M., Figueroa, E., Bochmann, J. and Rempe, G., *An elementary quantum network of single atoms in optical cavities*, Nature, Vol. 484, pp. 195-200, 2012.
- [8] Plenio, M. B. and Vedral, V., *Teleportation, entanglement and thermodynamics in the quantum world*, Contemporary Physics, Vol. 39, pp. 431-446, 1998.
- [9] Boyd, R. W., *Nonlinear Optics*, Third edition, Academic press 2008.
- [10] Demtroder, W., *Leser Spectroscopy*, Third edition, Springer, 2002.
- [11] Miranowicz, A., Leoński W., *Dissipation in systems of linear and nonlinear quantum scissors*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt, Vol. 6, pp. S43-S46, 2004.
- [12] Miranowicz, A., Leoński, W., *Two-mode optical state truncation and generation of maximally entangled states in pumped nonlinear couplers*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys, Vol. 39, pp. 1683, 2006
- [13] Xiao-San, M., An-Min, W., *Thermal Entanglement of an XY Two-Qubit Spin Chain with Dzyaloshinski-Moriya Interaction*, Commun. Theor. Phys, Vol. 52, No. 825, 2009.
- [14] Solano-Carrillo, E., Franco, R., and Silva-Valencia, J., *Entanglement and quantum phase transition in a mixed-spin Heisenberg chain with single-ion anisotropy*, Physica A, Vol. 390, pp. 2208-2214, 2011.
- [15] Foroozani, N. and Golshan, M.M., *Entanglement of A-atom and thermal photons in a double-band photonic crystal*, J. Stat. Mech., P02007, 2010.

در این شکلها منفیت برحسب دمای بهنجار شده خودکنش و دگرکنش رسم شده است. از این شکلها به وضوح دیده می‌شود که حالت پایه سیستم (دمای صفر مطلق) غیردرهمتنیده می‌باشد. هنگامی که دما افزایش یابد، تعداد حالت‌های برانگیخته به مراتب بیشتر شده و جداپذیری حالت‌های دو فوتون از دست رفته، بیشینه در درهمتنیدگی مشاهده می‌شود. از آنجائیکه با افزایش بیشتر دما حالت سیستم به سمت یک آنسامبل کاملاً آمیخته (جداپذیر) میل می‌کند، درهمتنیدگی کاهش می‌یابد. اما با توجه به اینکه تعداد حالت‌های فوتونی نامتناهی است دمای محدودی وجود ندارد که بالاتر از آن سیستم فوتون-فوتون جداپذیر شود. در نتیجه، منفیت هیچگاه صفر نخواهد شد و حالت‌های گرمایی فوتون-فوتون در یک نانو کاواک غیرخطی همیشه درهمتنیده هستند. با توجه به جمله  $H_{nonl}$  در هامیلتونی بدیهی است که با افزایش عوامل غیرخطی خودکنش و دگرکنش جدایی ترازهای انرژی افزایش می‌یابد. بنابراین، برای دو عامل غیرخطی دگرکنش و خودکنش بزرگتر، انرژی گرمایی بیشتری برای شمول حالت‌های برانگیخته پایین و همچنین رسیدن به بیشترین حد همبستگی حالت‌های فوتونی نیاز است. به بیان دیگر، ایجاد درهمتنیدگی و بیشینه درهمتنیدگی در دماهای مشخصه بالاتری رخ می‌دهد. علاوه بر این، بیشینه درهمتنیدگی با افزایش این دو عامل کاهش می‌یابد. این نتایج در شکل‌های ۱-۴ تأیید می‌شود.