بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

کوانتش میدان پلاسمون- پلاریتون سطحی با استفاده از روش تابع گرین

زیبا علامه[۱]، رسول رکنی‌زاده[۲]، رضا مسعودی[۱]

(۱)پژوهشکده لیزر و پلاسما، دانشگاه شهید بهشتی

(۲)دانشکده فیزیک، گروه کوانتوم اپتیک، دانشگاه اصفهان

چکیده – به منظور کوانتش امواج پلاسمون- پلاریتون سطحی، در این مقاله، روش تانسور تابع گرین پیشنهاد شده است. با استفاده از معادلات کوانتومی ماکسول و تابع گرین، عملگر پتانسیل برداری بدست آمده و با توجه به آن عملگرهای خلق و نابودی معرفی شده‌اند. با بدست آوردن رابطه جابجایی عملگرهای میدان و همچنین برقرار بودن رابطه جابجایی کانونیک، صحت روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته شده‌است.

کلید واژه- پلاسمون پلاریتون سطحی-کوانتش میدان- تانسور تابع گرین- عملگر خلق و نابودی- رابطه جابجایی کانونیک

Quantization of surface Plasmon polariton field by tensor Green's function method

Ziba Allameh[1], Rasoul Roknizadeh[2], Reza Massudi[1]

(۱)Laser and Plasma Research Institute, Shahid Beheshti University

(۲) Department of Physics, Quantum Optics, University of Isfahan

Abstract- In this paper, we propose tensor Green's function method for quantization of surface Plasmon polariton field. By obtaining the tensor Green function and applying the quantum Maxwell equation, the operator vector potential has obtained and one can introduce annihilation and creation operators. finally, the accuracy of canonical commutation relation has been explored.

Keywords: surface plasmon-polariton field quantization-tensor Green's function- annihilation and creation operators-canonical commutation relation.

۱- مقدمه

وجود خصوصیات منحصر به فرد پلاسمون-پلاریتون سطحی(SPP) مانند متمرکز کردن میدان‌های الکترومغناطیسی[۱]، باعث شده است این حوزه به یکی از حوزه‌های رو به رشد و پر کاربرد تبدیل شود. آشکار شدن ماهیت کوانتومیSPP از لحاظ نظری و تجربی[۳-۲]، امکان بکارگیری آنها را در حوزه‌های کوانتومی مانند پردازش اطلاعات کوانتومی[۴]، فراهم کرده است. برای این منظور لازم است یک مدل کوانتومی از SPPs بیان شود. مدل کوانتش ارائه شده، بر اساس دیدگاه هوبفیلد بوده که در آن اتلاف محیط در نظر گرفته نشده است. از طرف دیگر به منظور کوانتش در محیط‌های دی‌الکتریک پاشنده و اتلافی، مدلی بر پایه قطری‌سازی هامیلتونی بیان شده‌است[۵]. پس از آن، روش تابع گرین به عنوان روش کلی برای کوانتش در محیط‌های دی‌الکتریک متفاوت، بدون محدودیت در نوع و هندسه محیط دی‌الکتریک ارائه شده‌است [۷-۶]. بنابراین با توجه به ویژگی‌های روش تابع گرین، در این مقاله سعی می‌شود با این رویکرد به مسئله کوانتش امواج SPP پرداخته شود.

۲- مفاهیم اصلی

عملگرهای میدان در فضای فرکانس به مؤلفه‌های فرکانس مثبت و منفی تفکیک می‌شوند:

$$E(r,\omega)=E^{+}(r,\omega)+E^{-}(r,\omega),\qquad E^{+}(r,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}d\omega\, E^{+}(r,\omega)e^{-i\omega t} \quad (۱)$$

معادله ماکسول کوانتومی در یک محیط مادی با تابع دی‌الکتریک $\varepsilon(r,\omega)$ برای عملگر میدان، به صورت زیر بدست

می‌آید

$$\nabla\times\hat{E}^{+}(r,\omega)=i\omega\hat{B}^{+}(r,\omega),\qquad \nabla\times\hat{B}^{+}(r,\omega)=-i\omega\mu_0\varepsilon_0\varepsilon(r,\omega)\hat{E}^{+}(r,\omega)+\mu_0\hat{j}_N{}^{+}(r,\omega) \quad (۲)$$

در اینجا $\hat{j}_N^{+}(r,\omega)$ جریان نوفه محیط است که با توجه به قضیه افت و خیز- اتلاف به آهنگ نوسانات چگالی بار وابسته است و در رابطه جابجایی زیر صدق می‌کند:

$$\left[\hat{j}_N^{+}(r,\omega),\hat{j}_N^{-}(r',\omega')\right]=\left|\alpha(\omega)\right|\delta(r-r')\delta(\omega-\omega'),\qquad \left[\hat{j}_N^{+}(r,\omega),\hat{j}_N^{+}(r',\omega')\right]=\left[\hat{j}_N^{-}(r,\omega),\hat{j}_N^{-}(r',\omega')\right]=0 \quad (۳)$$

چنانچه عملگرهای میدان برحسب عملگر پتانسیل برداری نوشته شوند رابطه زیر برقرار خواهد شد:

$$-\nabla\times\nabla\times\hat{A}^{+}(r,\omega)+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(r,\omega)\hat{A}^{+}(r,\omega)=-\mu_0\hat{j}_N{}^{+}(r,\omega) \quad (۴)$$

روش کلی برای حل معادله بالا استفاده از تانسور تابع گرین است:

$$\hat{A}^{+}(r,\omega)=-\mu_0\int G(r,r',\omega).\hat{j}_N{}^{+}(r',\omega)dr' \quad (۵)$$

تانسور تابع گرین به گونه‌ای انتخاب می‌شود که در معادله زیر صدق کند:

$$-\nabla\times\nabla\times G(r,r',\omega)+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(r,\omega)G(r,r',\omega)=I\delta(r-r') \quad (۶)$$

همچنین تابع گرین دارای ویژگی‌های کلی است که برخی از آنها به صورت زیر خواهند بود :

$$G^{T}(r,r',\omega)=G(r',r,\omega)$$
$$G(r,r',-\omega)=G^{*}(r',r,\omega)$$
$$\lim_{|\omega|\to\infty}\frac{\omega^2}{c^2}G(r,r',\omega)=-\delta(r-r')$$

یکی از روش‌های متداول برای بدست آوردن تانسور تابع گرین، روش بسط ویژه مدهاست[۸]. در این روش فرض می‌شود چنانچه در شکل کلاسیک معادله ۴، $A_n(r)$ ویژه مد و $\lambda_n(r)$ ویژه مقدار باشند:

$$-\nabla\times\nabla\times A(r)+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)A(r)=\varepsilon(\omega)\lambda_n A(r) \quad (۷)$$

دراین صورت تانسور تابع گرین به صورت زیر بدست می‌آید:

$$G(r,r')=\sum_n\frac{A_n(r)[A_n(r')]^{*}}{N_n\lambda_n} \quad (۸)$$

در اینجا N_n ضریب بهنجارش ویژه مدها است که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(r)A_n(r).[A_m(r)]^{*}d^3r=N_n\delta_{nm} \quad (۹)$$

۳- کوانتش میدان

مسأله مورد بررسی، کوانتش امواج SPP است که در مرز فلز-دی‌الکتریک در راستای x انتشار می‌یابد. ناحیه فلز با ثابت دی‌الکتریک ε_m در $z<0$ و ناحیه دی‌الکتریک با ثابت دی‌الکتریک ε_d در $z<0$ گسترده شده است. در چنین شرایطی ویژه مدها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A_{k_x}(x,z)=(i\hat{x}+\frac{k_x}{\nu_i}\hat{z})e^{\nu_i z}e^{ik_x x}\quad z<0$$
$$A_{k_x}(x,z)=(i\hat{x}-\frac{k_x}{\nu_0}\hat{z})e^{-\nu_0 z}e^{ik_x x}\quad z>0 \qquad (۱۰)$$

در رابطه بالا ν_0 و ν_i ثابت میرایی در راستای عمود بر سطح بوده و به صورت زیر خواهند بود:

$$\nu_i=\sqrt{\frac{-\varepsilon_m}{\varepsilon_d}}|k_x|$$
$$\nu_0=\sqrt{\frac{\varepsilon_d}{-\varepsilon_m}}|k_x| \qquad (۱۱)$$

با جایگذاری معادله ۱۰ در رابطه۸ و بدست آوردن λ_n و N_n از معادله ۷ و ۹ و با کمی عملیات ریاضی، تانسور تابع گرین به صورت زیر بدست می‌آید:

$$G(r,r^{'},\omega)=-iC^{'}\times e^{ik_{spp}|x-x^{'}|}$$
$$\{(i\hat{x}+\frac{k_{spp}}{\nu_i}\hat{z})e^{\nu_i z}\Theta(-z)+(i\hat{x}-\frac{k_{spp}}{\nu_0}\hat{z})e^{-\nu_0 z}\Theta(z)\}\times$$
$$\{(i\hat{x}+\frac{k_{spp}}{\nu_i}\hat{z})e^{\nu_i z^{'}}\Theta(-z^{'})+(i\hat{x}-\frac{k_{spp}}{\nu_0}\hat{z})e^{-\nu_0 z^{'}}\Theta(z^{'})\}$$

(۱۲)

در اینجا $\Theta(z)$ تابع پله‌ای است. ضریب $C^{'}$ و k_{spl} به صورت زیر خواهند بود:

$$C^{'}=\frac{\pi}{\lambda_n N_n}$$
$$k_{spp}^2=\frac{\varepsilon_m\varepsilon_d}{\varepsilon_m+\varepsilon_d}k_0=(k^{'}+ik^{''})^2 \qquad (۱۳)$$

با جایگذاری تابع گرین در معادله۵ می‌توان عملگر پتانسیل برداری را بدست آورد:

$$\hat{A}^{+}(r,\omega)=i\mu_0 C^{'}\times e^{ik_{spp}|x-x^{'}|}$$
$$\{(i\hat{x}+\frac{k_{spp}}{\nu_i}\hat{z})e^{\nu_i z}\Theta(-z)+(i\hat{x}-\frac{k_{spp}}{\nu_0}\hat{z})e^{-\nu_0 z}\Theta(z)\}\times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}dx^{'}dz^{'}e^{ik_{spp}|x-x^{'}|}\quad\delta(z^{'})\hat{j}_N^{+}(x^{'},\omega^{'}).$$
$$\{(i\hat{x}+\frac{k_{spp}}{\nu_i}\hat{z})e^{\nu_i z^{'}}\Theta(-z^{'})+(i\hat{x}-\frac{k_{spp}}{\nu_0}\hat{z})e^{-\nu_0 z^{'}}\Theta(z^{'})\}$$

(۱۴)

در رابطه بالا، با توجه به اینکه امواج SPP در مرز فلز و دی‌الکتریک منتشر می‌شوند و نوسانات چگالی الکترون‌ها در $z=0$ وجود دارد بنابراین وابستگی جریان نوفه به متغیر z به صورت دلتای دیراک در نظرگرفته شده‌است. بخش انتگرالی در رابطه بالا را می‌توان برحسب مقادیر x و $x^{'}$ به دو بخش تفکیک کرده و کمی بازسازی معادله هر بخش را معادل با یک عملگر در نظر گرفت به طوریکه:

$$\hat{a}_R(x,\omega)=\left(\frac{2k^{''}}{|\alpha(\omega)|\beta(\omega)}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}dz^{'}dx^{'}e^{ik_{spp}(x-x^{'})}\times$$
$$\{(i\hat{x}+\frac{k_{spp}}{\nu_i}\hat{z})e^{\nu_i z^{'}}\Theta(-z^{'})+(i\hat{x}-\frac{k_{spp}}{\nu_0}\hat{z})e^{-\nu_0 z^{'}}\Theta(z^{'})\}$$
$$\hat{a}_L(x,\omega)=\left(\frac{2k^{''}}{|\alpha(\omega)|\beta(\omega)}\right)^{1/2}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dz^{'}dx^{'}e^{-ik_{spp}(x-x^{'})}\times$$
$$\{(i\hat{x}+\frac{k_{spp}}{\nu_i}\hat{z})e^{\nu_i z^{'}}\Theta(-z^{'})+(i\hat{x}-\frac{k_{spp}}{\nu_0}\hat{z})e^{-\nu_0 z^{'}}\Theta(z^{'})\}$$

(۱۵)

$\hat{a}_R$ ($\hat{a}_L$) عملگر نابودی ذره‌ای است که به سمت راست (به سمت چپ) حرکت می‌کند که در رابطه جابجایی زیر صدق می‌کند:

$$\left[\hat{a}_R(x,\omega),\hat{a}_L^{+}(x^{'},\omega^{'})\right]=\left[\hat{a}_L(x^{'},\omega^{'}),\hat{a}_R^{+}(x,\omega)\right]=$$
$$\delta(\omega-\omega^{'})\Theta(x-x^{'})\frac{2k^{''}}{k^{'}}\exp(-k^{''}(x-x^{'}))\sin k^{'}(x-x^{'})$$
$$\left[\hat{a}_R(x,\omega),\hat{a}_R^{+}(x^{'},\omega^{'})\right]=\left[\hat{a}_L(x^{'},\omega^{'}),\hat{a}_L^{+}(x,\omega)\right]=$$
$$\delta(\omega-\omega^{'})\exp(ik^{'}(x-x^{'}))\exp(-k^{''}(x-x^{'}))$$

(۱۶)

همچنین در رابطه ۱۵، ضریب $\beta(\omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(\omega)=1+\frac{1}{4}\left|\frac{k_{spp}}{\nu_i}-\frac{k_{spp}}{\nu_0}\right|^2 \qquad (۱۷)$$

بنابراین شکل عملگر پتانسیل برداری برحسب عملگرهای نابودی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\hat{A}^{+}(r,\omega) = i\mu_0 C^{'} \left(\frac{|\alpha(\omega)\beta(\omega)|}{2k^{''}}\right)^{1/2} \times \\ \{(i\hat{x}+\frac{k_{spp}}{\nu_i}\hat{z})e^{\nu_i z}\Theta(-z)+(i\hat{x}-\frac{k_{spp}}{\nu_0}\hat{z})e^{-\nu_0 z}\Theta(z)\}\times \\ [\hat{a}_R(x,\omega)+\hat{a}_L(x,\omega)]$$

(۱۸)

۴- بررسی رابطه جابجایی کانونیک

در روش تانسور تابع گرین، شکل عملگری میدان زمانی مورد تایید است که رابطه جابجایی کانونیک برقرار باشد:

$$\left[\hat{A}(r,t),-\varepsilon_0\hat{E}(r^{'},t)\right] = i\hbar\delta(r-r^{'}) \qquad (۱۹)$$

با استفاده از روابط ۱۶ و کمی عملیات ریاضی روابط زیر بدست می‌آید:

$$\left[\hat{A}^{+}(r,\omega),\hat{A}^{-}(r^{'},\omega^{'})\right] = -\left[\hat{A}^{-}(r,\omega),\hat{A}^{+}(r^{'},\omega^{'})\right] = \\ \delta(\omega-\omega^{'})\frac{|\alpha(\omega)|\beta(\omega)\mu_0^2}{\gamma(\omega)}\times \\ \int ds \quad \mathrm{Im}\,\varepsilon(s,\omega) \quad G(r,s,\omega).G^{*}(s,r^{'},\omega)$$

(۲۰)

در رابطه بالا

$$\varepsilon(s,\omega) = \varepsilon_m(\omega)\Theta(-s)+\varepsilon_d(\omega)\Theta(s)$$

و

$$\gamma(\omega) = \frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon_m}{2\,\mathrm{Re}\,\nu_i}\left(1+\frac{|k_{spp}|^2}{|\nu_i|^2}\right)+\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon_d}{2\,\mathrm{Re}\,\nu_0}\left(1+\frac{|k_{spp}|^2}{|\nu_0|^2}\right).$$

چنانچه $|\alpha(\omega)| = \dfrac{2\hbar\omega^2\gamma(\omega)\varepsilon_0}{\beta(\omega)}$ در نظر گرفته شود با انجام محاسبات ریاضی، رابطه جابجایی کانونیک به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\left[\hat{A}(r,t),-\varepsilon_0\hat{E}(r^{'},t)\right] = \frac{2i\hbar}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\frac{\omega}{c^2}\,\mathrm{Im}\,G(r,r^{'},\omega)$$

(۲۱)

با توجه به ویژگی‌های کلی تابع گرین می‌توان انتگرال را به کل فضای فرکانس تعمیم داد. از آنجا که تابع گرین در نیم فضای بالایی صفحه فرکانس مختلط تحلیلی است می‌توان تغییر متغیر $\omega = \rho e^{i\varphi}$ را انجام داد به طوریکه ρ به سمت ∞ میل کند. با انجام این مراحل رابطه کانونیک به صورت شکل کلی خود در رابطه ۱۹ بدست می‌آید.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله به بررسی مسئله کوانتش میدان با روش تابع گرین پرداخته شد. برای بدست آوردن شکل پتانسیل برداری بر حسب عملگرهای خلق و نابودی لازم آمد در ابتدا تانسور تابع گرین مناسب بدست آید. روش پیشنهاد شده استفاده از روش بسط ویژه مدهاست. پس از آن با معرفی عملگرهای خلق و نابودی و بررسی رابطه جابجایی کانونیک صحت عملگرهای میدان بدست آمده را مورد بررسی قرار دادیم.

مراجع

[۱] D. K. Gramotnev and S.I. Bozhevolnyi., *Plasmonics beyond the diffraction limit,* **Nat. Photonics**. ۴ (۲۰۱۰) ۸۳.

[۲] A. Huck., S. Smolka, P. Lodahl, A. S. Sørensen, A. Boltasseva, J. Janousek, and U. L. Andersen.,*Demonstration of Quadrature Squeezed Surface-Plasmons in a Gold Waveguide*, **Phys. Rev. Lett**. ۱۰۲ (۲۰۰۹) ۲۴۶۸۰۲.

[۳] Y. LiHua, W. YongGang and Y. BoJun. *Description of squeezed surface plasmons, .* ***Sci China-Phys Mech Astron,*** ۵۴ (۲۰۱۱) ۱۵۸۳–۱۵۸۶.

[۴] J. L. van Velsen, J. Twoizydlo and C. W. J. Beenakkei., *Scattering theory of plasmon-assisted entanglement transfer and distillation,* **Phys. Rev. A** ٦٨ (۲۰۰۳) ۰٤۳۸۰۷.

[۵] B. Huttner. S. M. Barnett, *Quantization of the electromagnetic field in dielectric***, Phys. Rev. A** ۴۶ (۱۹۹۲) ۴۳۰۶–۴۳۲۲.

[۶] R. Matloob, R Loudon, S. M. Barnet and J. Jeffers. *Electromagnetic field quantization in absorbing dielectrics*. **Phys. Rev. A** ٥٢ (۱۹۹٥) ٤۸۲۳.

[۷] T. Gruner and D.-G. Welsch,. *Green-function approach to the radiation-field quantization for homogeneous and inhomogeneous Kramers-Kronig dielectrics,* **Phys. Rev. A** ٥۳ (۱۹۹٦) ۱۸۱۸.

[۸] T. So.ndergaard and B. Tromborg., *General theory for spontaneous emission in active dielectric microstructures: Example of a fiber amplifier,* **Phys. Rev. A** ٦٤ (۲۰۰۱) ۰۳۳۸۱۲.