بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران

و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران

۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

فرمول‌بندی نقش ماره حاصل از شبکه‌های دو بعدی وقتی پارامترهای یکی از شبکه‌ها تغییرات جزئی و جمعی دارند

کتایون سماواتی[۱،۲]، حمیدرضا قمی[۱]، محمدتقی توسلی[۳]

[۱]پژوهشکده لیزر و پلاسما، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

[۲] گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال، تهران

[۳]دانشکده فیزیک دانشگاه تهران، انتهای خیابان کارگر شمالی، تهران

چکیده - در این مقاله فریزهای ماره حاصل از برهم نهی دو شبکه سطحی شبیه به هم از نقاط که پارامترهای یکی از شبکه‌ها تغییرات جزئی ولی جمعی دارد فرمولبندی می‌شود. نشان داده می‌شود که نقش ماره حاصل با توابع مربعی قابل توصیف است. بنابراین، هر پدیده فیزیکی که قابل تبدیل به تغییرات پارامترهای یکی از شبکه‌ها باشد با تکنیک ماره قابل مطالعه می‌شود. این مطلب را با برهم نهی چند شبکه معیوب روی شبکه‌های سالم محک زده‌ایم.

کلید واژه- اندازه‌گیری فاز، تحلیل عیوب، ماره دو بعدی، تکینگی فاز، توابع مربعی.

Formulation of the moiré fringes formed by superimposing 2D networks with slowly collective changes of network parameters

Katayoon Samavati[1, 2], H. Ghomi[1], M. Taghi Tavassoly[3]

[1] Laser & plasma Research Institute, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

[2] Department of Physics, Islamic azad University, Tehran North branch, Tehran, Iran.

[3] Department of Physics, University of Tehran, Tehran, Iran.

Abstract- In this article we formulate the moiré fringes that are formed by over laying two similar networks of points that the parameters of one of them suffers small collective defects. It is shown that the resulted moiré fringes can be described by quadratic functions. Therefore, any 2-D physical phenomenon that can be converted into the changes of the parameters of a network can be studied by the moiré technique. We have tested the approach by presenting some examples of superimposing defected networks on the similar networks free from defects.

Keywords: phase measurement, defect analysis, 2-D moiré, phase singularity, quadratic functions.

۱- مقدمه

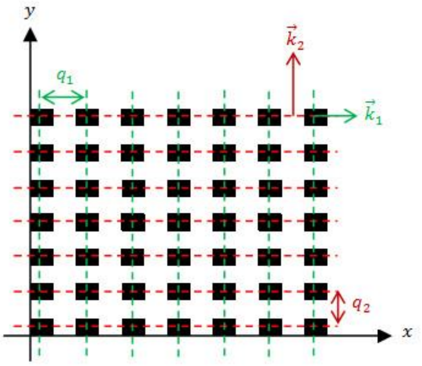
هرگاه دو ساختار شبکه‌ای از ضریب عبور و یا بازتاب تناوبی و یا شبه‌تناوبی برهم‌نهی شوند، در شرایطی خاص ساختار تناوبی جدیدی با دوره تناوب بیشتر ظاهر می‌گردد که به آن نقش یا فریزهای ماره گفته می‌شود. در اغلب مطالعات از نقش ماره حاصل از برهم‌نهی توریهای خطی استفاده شده است. با استفاده از توریهای خطی تنها تغییرات در امتداد عمود بر خطوط توری قابل مطالعه است در حالی که در بسیاری از پدیده‌های مورد مطالعه نظیر اندازه‌گیری تنش و کرنش در مواد، ابیراهی دستگاه‌های اپتیکی، پارامترهای پلاسما، تلاطم جو، تعیین شکل موج و ...، مطالعه تغییرات همزمان در دو بعد ضرورت پیدا می‌کند. بنابراین استفاده از توریهای دو بعدی و گنجاندن تغییرات در فرمولبندی مفید است. برای فرمولبندی نقش ماره روشهای مختلفی به کار رفته است که معروفترین آنها روش هندسی، معادلات پارامتری و روش تبدیل فوریه است[۱-۳]. در این فرمولبندیها تغییرات کوچک ولی جمعی پارامترهای توری گنجانده نشده است. در اینجا ما روشی را که قبلا در آن تغییرات پارامترهای توری یک بعدی را در فرمولبندی منظور کرده‌ایم به شبکه‌های دوبعدی تعمیم می‌دهیم[۴]. در این روش شبکه در هر ناحیه با دو بردار نمایش داده می‌شود که مقدار و جهت آن با مکان تغییر می کند. این روش ضمن سادگی بیشتر برای نمایش نقش ماره‌های شبکه‌های غیرخطی نیز کاربرد دارد. بعلاوه، چون این فرمولبندی در دستگاه مختصات انجام می‌گیرد امکان می‌دهد که عیوب جمعی در نواحی یک یا هر دو شبکه را در فرمولبندی که توابع مربعی‌اند گنجاند و با برازش این توابع بر رد فریزهای ماره حاصل عیوب را مشخص کرد.

۲- رهیافت نظری

در ساده‌ترین حالت برای ساخت شبکه دو بعدی از نقطه استفاده می‌کنیم. این شبکه را می‌توان شبیه دو توری خطی که خطوط آنها بر هم عمودند در نظر گرفت. در شکل ۱ یک شبکه دو بعدی مشاهده می‌شود که گام آن، فاصله بین دو نقطه متوالی تاریک، در امتداد محور x و y به ترتیب با q_1 و q_2 نشان داده شده است. برای هر امتداد یک بردار به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{k}_i = 2\pi\hat{k}_i / q_i \qquad (i=1,2) \tag{۱}$$

که در آن q_i گام شبکه و $\hat{k}_i$ بردار یکه عمود بر خطوط گذرنده از نقاط است که با محور متناظرش زاویه کمتر از $\pi/2$ می‌سازد. مقدار $1/q_i$ را فرکانس شبکه می‌نامند که تعداد گام در واحد طول را مشخص می‌کند، این شبکه را شبکه مرجع و بردارهای وابسته به آن، $\vec{k}_i$، را بردارهای مرجع می‌نامیم.



شکل ۱: نمایش شبکه دو بعدی که از یک سری مربع تشکیل شده است.

شبکه دوم را که شبکه نمونه می‌نامیم با بردارهای $\vec{k}_i'(x,y) = 2\pi\hat{k}_i' / q_i'(x,y) \quad (i=1,2)$ نشان می‌دهیم که می‌توانند از نقطه‌ای به نقطه دیگر دارای تغییرات آهسته باشند، بردارهای وابسته به این شبکه، $\vec{k}_i'$، را بردارهای نمونه می‌نامیم. باید یادآور شد که استفاده از فریزهای ماره در حالتهایی مفید و حساس است که اختلاف $\vec{k}_i$ و $\vec{k}_i'$ کم و زاویه میان دو شبکه کوچک باشد. در واقع، برای $\vec{k}_i' = \vec{k}_i$ فریز ماره تشکیل نمی‌شود و در سرتاسر سطح مشترک دو شبکه برهم نهاده شده، ضریب بازتاب و یا عبور در مقیاسی که از ساختار شبکه‌ها چشم‌پوشی شود یکسان است. در چنین مقیاسی فاز در سطح مشترک نامعین است، در واقع تکینگی فاز داریم. حال اگر به نحوی مقدار $\vec{k}_i$ و $\vec{k}_i'$ قدری تفاوت کند و یا بین آنها زاویه کوچکی ایجاد شود فریزهای ماره درشت ظاهر می‌شود. به عبارت دیگر، این فریزها پربندهای فاز ثابت در حوالی تکینگی فازند. چون این فریزهای درشت به تغییرات حول $\vec{k}_i' = \vec{k}_i$ بسیار حساس‌اند اگر بتوانیم تغییرات فیزیکی را به صورت تغییر یکی از این بردارها در حوالی $\vec{k}_i' = \vec{k}_i$ در بیاوریم مطالعه آن تغییرات با دقت بسیار زیاد میسر می‌شود.

وقتی دو شبکه با بردارهای $\vec{k}_i$ و $\vec{k}_i'$ برهم‌نهی می‌شوند

چهار جمله در توزیع فاز ظاهر می‌شود که منطبق بر بردارهای $\vec{k}_i$ ، $\vec{k}_i^{'}$، $\vec{k}_i^{'}+\vec{k}_i$ و $\vec{k}_i^{'}-\vec{k}_i$ هستند که آخرین جمله نمایش دهنده نقش ماره است. به عبارتی هر کدام از ردهای فریزهای ماره یک پربند فاز ثابت است که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\varphi_i(\vec{r})=\left(\vec{k}_i^{'}-\vec{k}_i\right)\cdot\vec{r}+\varphi_{i0} \qquad (۲)$$

$\vec{r}$ بردار مکان و φ_{i0} فاز اولیه است که به موقعیت شبکه نسبت به دستگاه مختصات بستگی دارد. بردار ماره، $\vec{K}_i$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{K}_i=\vec{k}_i^{'}-\vec{k}_i \qquad (۳)$$

حال اگر $\vec{k}_i$ یا $\vec{k}_i^{'}$ و یا هر دو با تغییر مکان به آهستگی تغییر کنند می‌توان آنها را حول یک نقطه در ناحیه مورد توجه بسط داد. برای سادگی کار فرض کردیم $\vec{k}_i$ ثابت باشد و جهت و مقدار $\vec{k}_i^{'}$ به آهستگی تغییر کند. البته اگر هر دو بردار هم دارای تغییرات آهسته باشند، فرمولبندی تغییر نمی‌کند. در ضمن چون اهمیت تکنیک ماره در حوالی تکینگی است، فرض می‌کنیم در مبدأ مختصات وضعیت شبکه‌ها با حالت تکینگی مطابقت دارد. بردارهای $\vec{k}_i$ و $\vec{k}_i^{'}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\vec{k}_i=\hat{x}k_{ix}+\hat{y}k_{iy}$$
$$\vec{k}_i^{'}=\hat{x}k_{ix}^{'}+\hat{y}k_{iy}^{'} \qquad (۴)$$

توابع $k_{ix}^{'}$ و $k_{iy}^{'}$ را در تقریب اول بسط می‌دهیم:

$$k_{ix}^{'}\cong k_{ix}^{'}(0)+\frac{\partial k_{ix}^{'}}{\partial x}x+\frac{\partial k_{ix}^{'}}{\partial y}y+\cdots,$$
$$k_{iy}^{'}\cong k_{iy}^{'}(0)+\frac{\partial k_{iy}^{'}}{\partial x}x+\frac{\partial k_{iy}^{'}}{\partial y}y+\cdots, \qquad (۵)$$

از روابط ۴ و ۵ در رابطه $\vec{k}_i^{'}-\vec{k}_i$ قرار می‌دهیم و در بردار مکان،

$$\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y} \qquad (۶)$$

ضرب می‌کنیم. نتیجه را در رابطه ۲ گذاشته رابطه به صورت زیر در می‌آید:

$$\varphi_i(\vec{r})\cong x\left[k_{ix}^{'}(0)-k_{ix}\right]+x\left[\frac{\partial k_{ix}^{'}}{\partial x}x+\frac{\partial k_{ix}^{'}}{\partial y}y\right]+ y\left[k_{iy}^{'}(0)-k_{iy}\right]+y\left[\frac{\partial k_{iy}^{'}}{\partial x}x+\frac{\partial k_{iy}^{'}}{\partial y}y\right]+\varphi_{i0} \qquad (۷)$$

با استفاده از نمادهای،

$$k_{ix}^{'}(0)-k_{ix}=K_{0ix} \quad , \quad k_{iy}^{'}(0)-k_{iy}=K_{0iy}$$
$$\frac{\partial k_{ix}^{'}}{\partial x}=\gamma_{ixx},\ \frac{\partial k_{ix}^{'}}{\partial y}=\gamma_{ixy},\ \frac{\partial k_{iy}^{'}}{\partial x}=\gamma_{iyx},\ \frac{\partial k_{iy}^{'}}{\partial y}=\gamma_{iyy}$$

رابطه ۷ شکل زیر را می‌گیرد:

$$\varphi_i(\vec{r})\cong K_{0ix}x+K_{0iy}y+\gamma_{ixx}x^2+ \left(\gamma_{ixy}+\gamma_{iyx}\right)xy+\gamma_{iyy}y^2+\varphi_{i0} \qquad (۸)$$

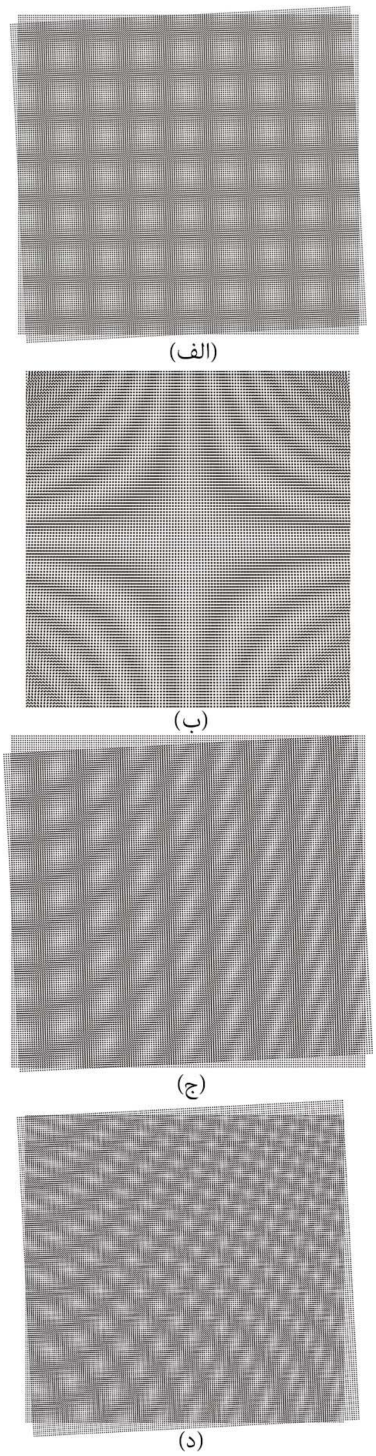
در صورتی که در $x=0$ و $y=0$ دو بردار $\vec{k}_i$ و $\vec{k}_i^{'}$ برابر باشند، یعنی مبداء مختصات نقطه تکینگی باشد، $K_{0ix}=K_{0iy}=0$، رابطه ۸ به شکل زیر در می‌آید:

$$\varphi_i(\vec{r})\cong\gamma_{ixx}x^2+\left(\gamma_{ixy}+\gamma_{iyx}\right)xy+\gamma_{iyy}y^2+\varphi_{i0} \qquad (۹)$$

همانطور که قبلا اشاره کردیم در مورد شبکه‌ها به ازای مقادیر مختلف $i=1,2$ دو دسته فریز ماره تشکیل می‌شود. روابط ۸ و ۹ نشان می‌دهند که پربندهای فاز ثابت، که همان رد فریزهای ماره‌اند در تقریب مرتبه اول ، در حالت عام، توابع مربعی‌اند. بنابراین با داشتن رد این فریزها می‌توان پارامترهای $\gamma_{ilm}(l=x,y,m=x,y)$ را به دست آورد و بردار $\vec{k}_i^{'}$ را در ناحیه مورد نظر مشخص کرد.

۳- تحلیل نقش ماره‌ی چند شبکه دو بعدی

نقاط شبکه‌ها منفصل‌اند بنابراین، تغییر در مقدار و جهت‌های آنها بطور انفصالی صورت می‌گیرد. البته این تغییرات، یعنی تغییر در گام شبکه و جهت آن باید بسیار کوچک باشد، تکنیک ماره ایجاب می‌کند که زاویه میان شبکه‌ها کوچک و گام آنهاها بهم نزدیک باشند در غیر این صورت استفاده از تکنیک ماره چندان مفید نیست. حال می‌توان به هر بردار $\vec{k}$ که دارای تغییرات گسسته است بردار $\vec{k}$ای نسبت داد که بطور پیوسته در ناحیه مورد مطالعه تغییر می‌کند. چون این تغییر باید بر حسب x و y بیان شود بردار $\vec{k}$ای به شبکه نسبت می‌دهیم که مقدار آن بر حسب x و y نماینده مقدار متوسط تغییرات در آن ناحیه باشد.



(الف) (ب) (ج) (د)

شکل ۲: نقش ماره حاصل از برهم‌نهی دو شبکه دو بعدی که در شبکه مرجع گام در هر دو جهت x و y مساوی و ثابت است و گام شبکه نمونه الف: در هر دو جهت یکسان و ثابت، ب: در یک جهت دارای تغییر زاویه، ج: در یک جهت دارای تغییر گام، د: در هر دو جهت دارای تغییر گام است.

در تشکیل فریزهای ماره در شکل۲ از دو شبکه استفاده شده که در شبکه مرجع، بردار $\vec{k}_1$ و $\vec{k}_2$ در تمام نقاط شبکه ثابت و طول $\vec{k}_1$ و $\vec{k}_2$ با هم برابر هستند. در شکل ۲- الف در شبکه نمونه نیز بردارهای $\vec{k}_1'$ و $\vec{k}_2'$ در تمام نقاط صفحه ثابت و نقش ماره به صورت دو دسته خطوط موازی هستند. در شکل ۲- ب بردار $\vec{k}_2'$ در تمام نقاط صفحه ثابت و بردار $\vec{k}_1'$ به صورت [۴]:

$$\vec{k}_1' = \frac{2\pi}{q_0+\beta y/2}\left[\hat{x}\cos\left(\frac{\beta x/2}{q_0+\beta y/2}\right)-\hat{y}\sin\left(\frac{\beta x/2}{q_0+\beta y/2}\right)\right] \quad (۱۰)$$

می‌باشد و خطوط ماره یک دسته هذلولی است. در شکل ۲- ج بردار $\vec{k}_2'$ ثابت و بردار $\vec{k}_1'$ دارای تغییرات گام به صورت [۴]:

$$\vec{k}_1' = 2\pi\hat{x}/\left(q_0\left(1+\sigma x/2q_0^2\right)\right) \quad (۱۱)$$

است، که نقش ماره آن شامل یک دسته خطوط موازی و یک دسته سهمی است. در شکل ۲- د بردارهای $\vec{k}_1'$ و $\vec{k}_2'$ هر دو متغیر و از رابطه (۱۱) تبعیت می‌کنند لذا نقش ماره از دو دسته سهمی هر کدام مربوط به یک امتداد تشکیل شده است.

۴- نتیجه‌گیری

با استفاده از شبکه‌های دو بعدی اندازه‌گیری کمیات فیزیکی که تغییرات آن به طور همزمان در دو بعد مهم است قابل مطالعه می‌باشد. با فرمولبندی ارائه شده پارامترهای شبکه که دارای تغییرات آهسته باشد با دقت بالا اندازه‌گیری و از آنجا مقدار کمیات فیزیکی وابسته به آن محاسبه می‌گردد.

مراجع

[1] K. Patorski, M. Kujawinska, “Handbook of the moiré fringe technique,” Elsevier, Amsterdam, (1993).

[2] I. Amidror, “The Theory of the Moiré Phenomenon, Volume I: Periodic Layers, 2nd ed.,” Springer-Verlag, London Limited, (2009).

[3] M. Abolhassani, “Formulation of moiré fringes based on spatial averaging,” Optik 122, 510-513 (2011).

[4] M. Taghi Tavassoly and Katayoon Samavati, “Formulation of the moiré fringes formed by superimposing linear gratings with slowly varying parameters” Applied Optics, Vol. 53, Issue 28, pp. 6612-6618 (2014)