بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

درهم تنیدگی حالت‌های اتم دو ترازه با فوتون‌ها در یک محیط چپ‌گرد

شکوفه امینی، سارا راستگو و محمدمهدی گلشن

بخش فیزیک ، دانشکده علوم ، دانشگاه شیراز

چکیده –ازآنجاکه درهم تنیدگی نقشی اساسی در حیطه‌ی محاسبات کوانتومی ، ارتباطات کوانتومی و غیره بازی می‌کند، در این مقاله به بررسی درهم تنیدگی فوتون و اتم‌های دو ترازه در کاواکی که توسط یک محیط مغناطو دی‌الکتریک چپ‌گرد احاطه‌شده است، می‌پردازیم. با استفاده از آنتروپی فون نویمان و در تقریب مارکوف، رفتار زمانی درهم تنیدگی اتم و میدان الکترومغناطیسی را برای یک حالت اولیه جدا پذیر محاسبه می‌نماییم. محاسبات ما نشان می‌دهد که درهم تنیدگی پس از رسیدن به مقداری بیشینه، دچار افت شده و با مرور زمان به‌طور مجانبی به سمت صفر میل می‌کند . همچنین مقایسه‌ای از رفتار درهم تنیدگی در محیط‌های چپ‌گرد نسبت به راست‌گرد ارائه می‌گردد.

کلیدواژه- اتم دو ترازه، تقریب مارکوف ، در هم تنیدگی، محیط چپ‌گرد

Entanglement of Two –Level Atoms and Photons in Left -Handed Materials

Sh. Amini, S. Rastgoo and M. M. Golshan

Physics Department, College of Sciences, Shiraz University

Abstract- Entanglement is well known to play a key role in the domains of quantum computing, quantum communication, etc. In this paper, we consider a cavity, surrounded by left-handed materials, in which a two- level atom interacts with photons. We employ von Neumann entropy, as a measure of entanglement, to describe the entanglement between atoms and the quantized electromagnetic field, in the Markov approximation. Starting from a separable state, it is shown that the degree of entanglement, as a function of time, varies from zero to a maximum and asymptotically diminishes. A comparison between this behavior and that in the right-handed materials is also given.

Keywords: Two -level Atoms, Markov approximation, Entanglement, left-handed materials

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

پیشرفت‌های اخیر درزمینه‌ی ساخت مواد مصنوعی، منجر به ظهور محیط‌های مادی با ضریب شکست منفی شده است. با استفاده از مدل درود-لورنتس به‌راحتی دیده می‌شود که محیط‌های مزبور در یک بازه بسامدی مشخص گذردهی الکتریکی و تراوایی مغناطیسی منفی را به نمایش می‌گذارند. انتشار امواج الکترومغناطیسی در این مواد اولین بار توسط وسلاگو در سال ۱۹۶۸ به‌طور نظری موردمطالعه قرار گرفت. بر طبق معادلات ماکسول در این مواد بردار میدان الکتریکی، بردار میدان مغناطیسی و بردار موج یک دستگاه چپ‌گرد تشکیل می‌دهند. بردار پوئینتینگ و بردار موج در این‌گونه مواد جهت‌های مخالف دارند به همین دلیل وسلاگو این مواد را چپ‌گرد نامید. این مواد ویژگی‌های نامتعارفی از خود نشان می‌دهند که از آن جمله می‌توان به ضریب شکست منفی، اثر دوپلر وارون و تابش چرنکوف وارون اشاره کرد[2,1]. با توجه به این مطالب انتظار می‌رود که رفتار ذرات باردار در برهم‌کنش با میدان الکترومغناطیسی در مواد چپ‌گرد در مقایسه با مواد معمول، تفاوت خواهد داشت. بدین ترتیب بررسی برهمکنش ذرات باردار (اتم) و میدان الکترومغناطیسی بخصوص در شکل کوانتومی آن از اهمیت بسزایی برخوردار می‌باشد. یکی از این زمینه‌ها بررسی در هم تنیدگی کوانتومی بین اتم و میدان الکترومغناطیسی را تشکیل می‌دهد. بنابراین با در نظر گرفتن کوانتش میدان در دی‌الکتریک‌ها، مبتنی بر تابع گرین [4,3]، و برهم‌کنش ذرات باردار با میدان الکترومغناطیسی در محیط مغناطو دی‌الکتریک چپ‌گرد[۵]، به مطالعه دینامیک درهم تنیدگی خواهیم پرداخت. در این مقاله تغییرات زمانی درهم تنیدگی را با تقریب استاندارد مارکوف در محیط چپ‌گرد بررسی خواهد شد .

۲- هامیلتونی و دینامیک حالت‌های سیستم

فرض می کنیم اتم دو ترازه برانگیخته‌ای با تراز بالائی $|u\rangle$ و تراز پایینی $|l\rangle$ با تفاوت انرژی $\hbar\omega_A$ در مرکز یک کاواک تهی به شعاع R قرار دارد. همچنین فرض می شود که این کاواک با ماده مغناطو دی‌الکتریک احاطه شده است. هامیلتونی سیستم تحت تقریب امواج چرخان و دوقطبی الکتریکی به صورت زیر می باشد[5].

$$\hat{H} = \sum_{\lambda=e,m}\int d^3r\int d\omega\hbar\omega\hat{f}_\lambda^{\dagger}(\vec{r},\omega)\hat{f}_\lambda(\vec{r},\omega) + \hbar\omega_A\hat{\sigma}^{\dagger}\hat{\sigma} - [\hat{\sigma}^{\dagger}\vec{d}_A.\int_0^\infty d\omega\vec{E}(\vec{r},\omega) + H.c.] \quad (۱)$$

اولین جمله، هامیلتونی میدان در محیط مغناطودی الکتریک، دومین جمله هامیلتونی اتم و سومین جمله مربوط به برهمکنش میدان و اتم دو ترازه است. در این رابطه، $(\lambda = e,m)$، $\hat{f}_\lambda(\vec{r},\omega)$ و $\hat{f}_\lambda^{\dagger}(\vec{r},\omega)$، عملگرهای خلق و نابودی پلاریتون های الکتریکی و مغناطیسی هستند. همچنین $\hat{\sigma}^{\dagger} = |u\rangle\langle l|$ و $\hat{\sigma} = |l\rangle\langle u|$ به ترتیب عملگرهای بالا برنده و پایین برنده برای اتم دو ترازه و $\vec{d}_A$ گشتاور دو قطبی گذار اتمی می باشد [5]. پایه های فضای هیلبرت مورد نظر به شکل $|n_e, n_m, A\rangle = |n_e\rangle\otimes|n_m\rangle\otimes|A\rangle$ بوده که در آن $|A\rangle$ حالت های اتمی و $|n_{e(m)}\rangle$ حالت های پلاریتون الکتریکی (مغناطیسی) می باشند. فرض می کنیم که حالت اولیه سیستم $|0,0,u\rangle$ باشد. بدین ترتیب حالت سیستم در هر لحظه عبارت خواهد بود[5]:

$$|\psi(t)\rangle = C_u(t)e^{-i\omega_A t}|0,0,u\rangle + \int d^3r\int_0^\infty d\omega\hbar\omega e^{-i\omega t}C_{el}(\vec{r},\omega,t)|1(\vec{r},\omega),0,l\rangle + \int d^3r\int_0^\infty d\omega\hbar\omega e^{-i\omega t}C_{ml}(\vec{r},\omega,t)|0,1(\vec{r},\omega),l\rangle \quad (۲)$$

در رابطه اخیر $C_u(t)$ و $C_{\lambda l}(r,\omega,t)$ به ترتیب دامنه های احتمال حضور سیستم در حالتی با هیچ پلاریتون(حالت اولیه) و حالتی که در آن اتم به حالت پایه در حضور یک پلاریتون رفته است (حالت نهایی)، هستند. با استفاده از رابطه(۱) در معادله شرودینگر و بهنجارش ضرائب احتمال، معادلات جفت شده ای بدست می آید. می توان نشان داد که دامنه احتمال برای یافتن اتم در حالت برانگیخته از رابطه زیر نتیجه می شود [5]:

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]

$$\dot{C}_u(t) = -\frac{1}{\pi\varepsilon_0\hbar}\int_0^t dt'\int_0^\infty d\omega\frac{\omega^2}{c^2}e^{-i(\omega-\omega_A)(t-t')} \times \vec{d}_A.\mathrm{Im}\,G(\vec{r}_A,\vec{r}_A,\omega).\vec{d}_A C_u(t') \quad (۳)$$

که در آن $G(\vec{r}_A,\vec{r}_A,\omega)$، با موقعیتِ اتمی $\vec{r}_A$، تابع گرین کلاسیک می باشد که اثر محیط و ویژگیهای ماکروسکوپی محیط مثل گذردهی الکتریکی و پذیرفتاری مغناطیسی را بیان می‌کند[7,6]. شکل صریح تابع گرین که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است در [5] آمده است. همانگونه که در مرجع [8]، نشان داده شده است، با دانستن $C_u(t)$ می توان دو دامنه احتمال دیگر، C_{el} و C_{ml} را حساب نمود.

۳- محاسبه دامنه های احتمال در تقریب مارکوف

معادله (۳) را می توان برای هر رژیم جفت شدگی دلخواه به کار برد اما مطالعه مساله مورد نظر را به رژیم جفت شدگی ضعیف محدود می‌کنیم که بر طبق آن می توان از تقریب مارکوف استفاده نمود. در سیستم مارکوفی حافظه سیستم از بین می‌رود و رفتار سیستم در زمان مطالعه آن به رفتارش در زمان گذشته مربوط نخواهد شد[7]. با استفاده از این تقریب می توان $C_u(t)$ را جایگزین $C_u(t')$ در سمت راست رابطه‌ی (۳) نموده، رابطه زیر را بدست آورد:

$$\dot{C}_u(t) = -\frac{C_u(t)}{\pi\varepsilon_0\hbar}\int_0^\infty d\omega\frac{\omega^2}{c^2} \left[\pi\delta(\omega_A-\omega)+iP(\frac{1}{(\omega_A-\omega)})\right] \times \vec{d}_A\cdot\mathrm{Im}\,G(\vec{r}_A,\vec{r}_A,\omega)\cdot\vec{d}_A \quad (۴)$$

که در آن از

$$\int_0^t dt' e^{-i(\omega-\omega_A)(t-t')} \rightarrow \pi\delta(\omega_A-\omega)+iP(1/(\omega_A-\omega)) \quad (۵)$$

استفاده شده است. با صرف نظر کردن از قسمت اصلی انتگرال که جابجایی فرکانس گذار اتمی را می دهد خواهیم داشت، $C_u(t)=\exp(-\Gamma t/2)$ و

$$C_{el}(\vec{r},\omega,t) = \sqrt{\frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon(\vec{r},\omega)}{\pi\varepsilon_0\hbar}}(\frac{\omega^2}{c^2})d_A.G^*(\vec{r}_A,\vec{r},\omega) \times(\frac{e^{(i(\omega-\omega_A)-\frac{1}{2}\Gamma)t}-1}{i(\omega-\omega_A)-\frac{1}{2}\Gamma}) \quad (۶)$$

$$C_{ml}(\vec{r},\omega,t) = \sqrt{-\frac{\mathrm{Im}\,k(\vec{r},\omega)}{\pi\varepsilon_0\hbar}}(\frac{\omega}{c})d_A.[G^*(\vec{r}_A,\vec{r},\omega)\times\nabla] \times(\frac{e^{(i(\omega-\omega_A)-\frac{1}{2}\Gamma)t}-1}{i(\omega-\omega_A)-\frac{1}{2}\Gamma}) \quad (۷)$$

در سه رابطه اخیر، Γ نرخ گسیل خودبخودی اتم دو ترازه است: $\Gamma = 2\omega_A{}^2\vec{d}_A\cdot\mathrm{Im}\,G(\vec{r}_A,\vec{r}_A,\omega)\cdot\vec{d}_A/\varepsilon_0\hbar c^2$.

۴- تحول زمانی عملگر چگالی و محاسبه آنتروپی فون نویمان

روشهایی جهت سنجیدن شدت درهم تنیدگی وجود دارد[9] که در این مقاله آنتروپی فون نویمان را محاسبه می کنیم. خاطرنشان می‌شود که اگر پس از ردگیری جزئی روی یک زیرسیستم نتیجه یک آنسامبل آمیخته باشد، آنگاه زیرسیستم مذکور با سایر زیرسیستم‌ها درهمتنیده است[10]. سیستم مورد نظر یک آنسامبل خالص را تشکیل می دهد، بنابراین عملگر چگالی $\rho^{AF}(t)=|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ می باشد. با استفاده از رابطه (۲) و رد گیری روی حالت‌های اتمی، عملگر چگالی کاهش یافته به صورت زیر نتیجه خواهد شد:

$$\begin{aligned}\rho^F(t) = Tr_A(\rho^{AF}(t)) &= |C_u(t)|^2|0,0\rangle\langle 0,0| \\ &+\int d^3r\int_0^\infty d\omega\hbar\omega|C_{el}|^2|1(\vec{r},\omega),0\rangle\langle 1(\vec{r},\omega),0| \\ &+\int d^3r\int_0^\infty d\omega\hbar\omega|C_{ml}|^2|0,1(\vec{r},\omega)\rangle\langle 0,1(\vec{r},\omega)| \\ &+\int d^3r\int_0^\infty d\omega\hbar\omega C_{ml}C^*{}_{el}|0,1(\vec{r},\omega)\rangle\langle 1(\vec{r},\omega),0| \\ &+\int d^3r\int_0^\infty d\omega\hbar\omega C_{el}C^*{}_{ml}|1(\vec{r},\omega),0\rangle\langle 0,1(\vec{r},\omega)|\end{aligned} \quad (۸)$$

برای محاسبه آنتروپی فون نویمان باید ویژه مقادیر $\rho^F(t)$ را محاسبه نمود. بدین ترتیب خواهیم داشت:

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]

$$\lambda_1 = |C_u|^2, \lambda_2 = |C_{el}|^2 + |C_{ml}|^2 = 1 - |C_u|^2, \lambda_3 = 0 \quad (۹)$$

طبق رابطه‌ی $S_{vN} = -\sum_i \lambda_i \ln \lambda_i$، آنتروپی فون نویمان در سیستم مورد نظر به صورت زیر خواهد شد.

$$S_{vN} = -|C_u|^2 \ln|C_u|^2 - (1-|C_u|^2)\ln(1-|C_u|^2) \quad (۱۰)$$

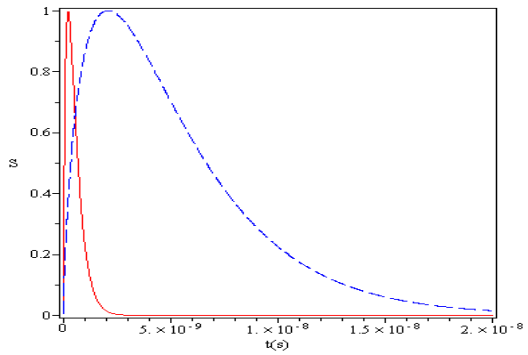
که در آن $C_u(t)$ قبل از رابطه (۶) تعریف شده است .

۵- نتیجه‌گیری

با استفاده از رابطه (۱۰) و $C_u(t) = \exp(-\Gamma t/2)$، درجه-ی درهم تنیدگیِ اتم دو ترازه با فوتون‌ها در حضورِ ماده چپ‌گرد محاسبه و رفتار زمانی آن، به ازای دو مقدارِ ضریب جذب، در شکل (۱) نشان داده شده است. همچنین در شکل (۲) این رفتار برای دو محیط راستگرد و چپ‌گرد ارائه شده است. از این دو شکل نتایج زیر مشاهده می شود.

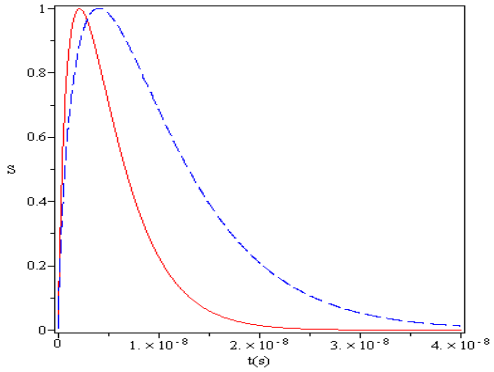
* سیستم در لحظه صفر در یک حالت جداپذیر قرار داشته و با گذر زمان در سیستم درهم تنیدگی تولید می شود. درهم تنیدگی پس از رسیدن به مقداری بیشینه، دچار افت شده و با مرور زمان به طور مجانبی به سمت صفر میل می‌کند.

*با مقایسه‌ی درهم تنیدگی به ازای ضرایب متفاوت اتلاف (جذب) به این نتیجه رسیدیم که با افزایش جذب، تغییرات زمانی درهم تنیدگی سریعتر میرا می شوند.



شکل ۱: تغییرات درهم تنیدگی اتم با زمان به ازای $\gamma_e = \gamma_m = 0.01$ (نمودار قرمز،پر). $\gamma_e = \gamma_m = 0.001$ (نمودار آبی، خط چین). برای رسم این نمودارها از داده های زیر استفاده شده است. $\omega_{Tm} = 10^{10}(Hz)$ ، $\omega_{Pm} = 0.43\omega_{Tm}$ ، $\omega_{Pe} = 0.75\omega_{Tm}$ ، $\omega_{Te} = 1.03\omega_{Tm}$.

*مقایسه تغییرات درهم تنیدگی در محیط های چپ‌گرد نسبت به راستگرد نشان می دهد که درهم تنیدگی در محیط های راستگرد (ضریب شکست مثبت) در مقایسه با محیط های چپ‌گرد (ضریب شکست منفی) دیرتر دچار اتلاف می شوند.



شکل ۲: مقایسه تغییرات درهم تنیدگی اتم با زمان به ازای $\gamma_e = \gamma_m = 0.001$ برای محیط چپ‌گرد (نمودار قرمز، پر) و محیط راستگرد (نمودار آبی، خط چین). این دو نمودار نیز با استفاده از داده های شکل (۱) رسم شده است.

مراجع

[1] V. G. Veselago, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of* μ, ε **Sov. Phys. Usp**. **10**, 509-514, (1968).

[2] R. M. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz, *Experimental verification of a negative refraction index of refraction* ***Science,*** **292**, 77, (2001).

[3] T. Gruner and D. G. Welsch, *Green function approch to the radiation field quantization for homogeneous kramers -kronig dielectrics*, **Phys. Rev.A53,** 1818 (1996).

[4] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum optics*, Cambridge University Press (1997).

[5] H. T. Dung, S. Y. Buhmann, L. Knoll, and D. G. Welsh, *Electromagnetic-field quantization and spontaneous decay in left -handed media*, **Phys. Rev**. **A68**, 043816 (2003).

[6]L. Knoll, S. Scheel, and D. G. welsch, *in Coherence and Statistics of Photon and Atoms*, (2001).

[7] H. T. Dung, L. Knoll, and D. G. Welsh, *Resonant dipole-dipole interaction in the presence of dispersing and absorbing surroundings*, **Phys. Rev**. **A66**, 063810 (2002).

[8] شکوفه امینی، پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک اتمی، *درهم تنیدگی حالت‌های اتم دو ترازه با فوتون‌ها در محیط* چپ‌گرد دانشگاه شیراز، (۱۳۹۱).

[9] M. B. Plenio and S. Virmani, *An introduction to entanglement measures*, **Quant comp**. **7**, (2007).

[10] F. Amiri, S. Rastgoo and M. M. Golshan, **Phys. Lett. A 378**, 1985-1991 (2014).

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-14]