بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

تولید برهم نهی ویژه‌ای از حالت‌های همدوس غیرخطی و حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده

امیر کریمی[۱،۲]؛ محمد کاظم توسلی[۱،۳]

[۱] گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد ، یزد
[۲] گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، آباده، فارس
[۳] گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده – در این مقاله، پس از مروری کوتاه بر حالت‌های همدوس غیرخطی و عملگر پاریته، با استفاده از این عملگر و عملگر جابجایی-گونه غیرخطی، عملگرهای جدیدی تعریف کرده و با کنش آنها روی حالت خلاء میدان، برهم‌نهی‌ای از دو حالت همدوس غیرخطی و حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده دومدی را تولید می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که با تعمیم روش‌های ارائه شده در این مقاله، می‌توان برهم‌نهی بیش از دو حالت همدوس غیرخطی و خلاء میدان و نیز حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده چندمدی را نیز تولید کرد.

کلید واژه: برهم‌نهی حالت‌ها، درهم‌تنیدگی، برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیرخطی، حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده.

Production of a Particular Superposition of Nonlinear Coherent States and Entangled Nonlinear Coherent States

A. Karimi[(1),(2)]; M. K. Tavassoly[(1),(3)]

[(1)] Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, University of Yazd, Yazd
[(2)] Department of Physics, Islamic Azad University of Abadeh, Fars
[(3)] Photonic & Research Group, Engineering Research Center, University of Yazd, Yazd

Abstract- In this paper, after a brief review on the nonlinear coherent states and parity operator by using this operator and nonlinear displacement-type operator, we construct new operators which by the action of them on the vacuum state of the field, we generate a superposition of two nonlinear coherent states and two-modes entangled nonlinear coherent states. Also, we show that by the generalization of the presented method in this paper, the superposition of more than two nonlinear coherent states with the vacuum state of the field and *n*-mode entangled nonlinear coherent states can be generated.

Keywords: Superposition of states, Entanglement, Superposition of nonlinear coherent states, Entangled nonlinear coherent states.

۱. مقدمه:

در دهه‌های اخیر با پیشرفت مکانیک کوانتومی، دو مفهوم برهم‌نهی و درهم‌تنیدگی به واسطه نقش اساسی‌ای که در فرایند اطلاعات کوانتومی برعهده دارند، توجه بسیاری را به خود جلب کرده‌اند. اصل برهم‌نهی با ایجاد ترکیب‌هایی خطی از حالت‌های کوانتومی منجر به حالت‌هایی جدید با ویژگی‌های غیرکلاسیکی ممتاز می‌شود[۱،۲] و درهم-تنیدگی که در مرکز توجه بسیاری از پژوهشگران قرار دارد، نقش کلیدی در پدیده‌های کاربردی در دانش اطلاعات کوانتومی ایفا می‌کند[۳،۴]. به‌علاوه، در سال‌های اخیر حالت‌های کوانتومی نوع متغیر پیوسته‌ی درهم‌تنیده که از میان آنها می‌توان به حالت‌های ساخته‌شده از حالت‌های همدوس درهم‌تنیده اشاره کرد، کاربردهای وسیعی در حوزه اطلاعات کوانتومی یافته است[۵،۶]. به همین منظور طرح‌های نظری و تجربی فراوانی برای تولید برهم‌نهی حالت‌های همدوس و نیز حالت‌های همدوس درهم‌تنیده ارائه‌شده است[۷،۸]. با تکیه بر رهیافت حالت-های همدوس غیرخطی می‌توان به رده‌ی وسیعی از برهم-نهی این حالت‌ها و همچنین حالت‌های همدوس غیرخطی (نوع متغیر پیوسته‌ی) درهم‌تنیده به‌ازای توابع غیرخطی گوناگون دست یافت و علاوه بر رفتار غیرکلاسیکی، نقش و کاربرد آنها را در دانش اطلاعات کوانتومی مورد مطالعه و تحلیل قرار داد. بنابراین، در این مقاله پس از مروری کوتاه بر حالت‌های همدوس غیرخطی، با معرفی عملگر پاریته و بنای عملگرهای جدید به کمک عملگرهای پاریته و جابجایی‌گونه غیرخطی و کنش آن‌ها روی حالت خلاء میدان، برهم‌نهی‌های جدیدی از حالت‌های همدوس غیرخطی و نیز حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده را تولید می‌کنیم. هر چند به علت محدودیت جا، نمی-توانیم ویژگی‌های حالت‌های معرفی شده را تحلیل کنیم ولی مسلما هر دسته از آنها به ترتیب دارای برخی ویژگی-های غیرکلاسیکی و مقادیری از درهم‌تنیدگی هستند که براساس محاسبات عددی کار چندان سختی نیست.

۲. تولید برهم‌نهی دو حالت همدوس غیرخطی

دو نوع حالت همدوس غیرخطی $|\alpha, f\rangle_1$ و $|\alpha, f\rangle_2$ به‌ترتیب توسط کنش دو عملگر جابجایی‌گونه (غیریکانی) غیرخطی $D_1(\alpha)=\exp(\alpha B^\dagger-\alpha^* A)$ و $D_2(\alpha)=\exp(\alpha A^\dagger-\alpha^* B)$ روی حالت خلاء میدان $|0\rangle$، به شکل زیر به‌دست می-آیند[۹]:

$$|\alpha, f\rangle_1 = D_1(\alpha)\,|0\rangle = N_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}[f(n)]!}\,|n\rangle$$

$$|\alpha, f\rangle_2 = D_2(\alpha)\,|0\rangle = N_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n[f(n)]!}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \qquad (۱)$$

که در آن $A = af(n)$ و $A^\dagger = f(n)a^\dagger$ به‌ترتیب عملگرهای نابودی و آفرینش غیرخطی و عملگرهای $B = a(1/f(n))$ و $B^\dagger=(1/f(n))a^\dagger$ دو عملگر غیرخطی کمکی هستند[۵]. همچنین در روابط بالا، ضرایب N_1 و N_2 ثابت‌های بهنجارش هستند و $[f(n)]!$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$[f(n)]! = f(n)f(n-1)\ldots f(0)!,\quad [f(0)]!=1 \qquad (۲)$$

حالت‌های همدوس غیرخطی حاصل، هم‌زاد یا دوگان یکدیگر نامیده می‌شوند.

از سوی دیگر عملگر پاریته به شکل زیر معرفی‌شده است[۱۰]:

$$\Pi = \cos(\pi a^\dagger a) \qquad (۳)$$

که عملگری هرمیتی و یکانی است و با کنش آن روی حالت‌های عددی زوج و فرد به‌ترتیب ویژه‌مقادیر $+1$ و -1 حاصل می‌شود:

$$\Pi\,|n\rangle = (-1)^n\,|n\rangle \qquad (۴)$$

به‌راحتی می‌توان آزمود که عملگرهای $X = A, A^\dagger, B, B^\dagger$ در رابطهٔ عملگری زیر صدق می‌کنند:

$$X\,\Pi\,X = -X \qquad (۵)$$

حال به‌منظور تولید برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیرخطی، ابتدا عملگر $D_j(\alpha)\Pi$ را بنا می‌کنیم که اندیس‌های $j=1,2$ به دو نوع عملگر جابجایی‌گونه غیرخطی اشاره دارد. به راحتی می‌توان نشان داد که:

$$[D_j(\alpha)\Pi]^2 = \mathrm{I},\quad j=1,2 \qquad (۶)$$

حال با استفاده از عملگر پاریته در (۳)، عملگرهای $U_j(\lambda,\alpha,f)$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$U_j(\lambda,\alpha,f) = e^{i\lambda D_j(\alpha)\Pi},\quad j=1,2 \qquad (۷)$$

که در آن λ کمیتی حقیقی و $f(n)$ یک تابع غیرخطی است. با استفاده از روابط (۶) و (۷)، عملگرهای $U_j(\lambda,\alpha,f)$ را می‌توان با استفاده از بسط سری نمایی به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$U_j(\lambda,\alpha,f) = cos(\lambda)\mathrm{I} + i\,sin(\lambda)\,D_j(\alpha)\Pi \qquad (۸)$$

با تغییر متغیر α به $\beta-\alpha$ در عملگرهای $U_j(\lambda,\alpha,f)$ و کنش عملگر جابجایی‌گونه غیرخطی $D_j(\alpha)$ روی آن، عملگرهای $V_j(\lambda,\alpha,\beta,f)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_j(\lambda,\alpha,\beta,f) = D_j(\alpha)U_j(\lambda,\beta-\alpha,f) = cos(\lambda)D_j(\alpha)+ie^{i\Im(\alpha\beta^*)}sin(\lambda)D_j(\beta)\Pi \qquad (۹)$$

که در آن $\Im(x)$ بیان‌گر قسمت موهومی x است. با کنش عملگرهای $V_j(\lambda,\alpha,\beta,f)$ روی حالت خلاء میدان $|0\rangle$، به برهم‌نهی‌ای از دو حالت همدوس غیرخطی به شکل زیر دست می‌یابیم:

$$V_j(\lambda,\alpha,\beta,f)|0\rangle = cos(\lambda)|\alpha,f\rangle_j + ie^{i\Im(\alpha\beta^*)}sin(\lambda)|\beta,f\rangle_j \qquad (۱۰)$$

۳. تولید برهم‌نهی بیش از دو حالت همدوس غیرخطی

در این قسمت به منظور افزایش تعداد مؤلفه‌های حالت‌های همدوس غیرخطی تولید شده در برهم‌نهی، با تعمیم روش ارائه شده در قسمت قبل عملگرهای $V_j^{(2)}(\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\delta,f)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_j^{(2)}(\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\delta,f) = V_j(\lambda,\alpha,\beta,f)V_j(\mu,\gamma,\delta,f) \qquad (۱۱)$$

که با استفاده از رابطه (۹) و جایگذاری در رابطه بالا و کنش عملگرهای $V_j^{(2)}(\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\delta,f)$ حاصل روی حالت خلاء میدان $|0\rangle$، برهم‌نهی‌ای از چهار حالت همدوس غیرخطی $|\alpha+\gamma,f\rangle_j$، $|\alpha+\delta,f\rangle_j$، $|\beta-\gamma,f\rangle_j$ و $|\beta-\delta,f\rangle_j$ به‌دست می‌آید. اما، علیرغم ظاهرشدن چهار حالت همدوس غیرخطی در برهم‌نهی، این چهار حالت مستقل نیستند. در واقع، مشاهده می‌کنیم که با در نظر گرفتن چهار ثابت دلخواه c_4,c_3,c_2,c_1 و حل معادلات:

$$\alpha+\gamma=c_1,\quad \alpha+\delta=c_2,\quad \beta-\gamma=c_3,\quad \beta-\delta=c_4, \qquad (۱۲)$$

و یافتن مقادیر $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ برای تولید برهم‌نهی از چهار حالت مستقل:

$$|c_1\rangle_j, |c_2\rangle_j, |c_3\rangle_j, |c_4\rangle_j \qquad (۱۳)$$

دترمینان ضرایب صفر می‌شود. اما می‌توان تنها با نگه‌داشتن یکی از مقادیر γ یا δ و صفرکردن بقیه مقادیر، برهم‌نهی از دو حالت همدوس غیرخطی و حالت خلاء به شکل‌های $|-\delta,f\rangle_j$، $|+\delta,f\rangle_j$ و $|0\rangle$ و یا $|-\gamma,f\rangle_j$، $|+\gamma,f\rangle_j$ و $|0\rangle$ را تولید کرد. هر چند در حالت تولیدشده توسط عملگر (۱۱) هنوز شاهد حضور دو حالت همدوس غیرخطی در برهم‌نهی تولیدشده هستیم، ولی به‌راحتی می‌توان نشان داد که با در نظر گرفتن عملگر $V^{(N)}$ به شکل:

$$V_j^{(N)} = \prod_{k=1}^{N} V_j(\lambda_k,\alpha_k,\beta_k,f) \qquad (۱۴)$$

می‌توان برهم‌نهی تعداد بیشتری از حالت‌های همدوس غیرخطی را تولید کرد.

۴. تولید حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده دومدی

در این قسمت از مقاله با استفاده از روشی که در قسمت قبل ارائه و منجر به تولید برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیرخطی شد، حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده را تولید می‌کنیم. بدین‌منظور، ابتدا عملگرهای $U_{j,ab}(\lambda,\alpha,\beta,f)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$U_{j,ab}(\lambda,\alpha,\beta,f) = e^{i\lambda D_{j,a}(\alpha)\Pi_a D_{j,b}(\beta)\Pi_b} \qquad (۱۵)$$

که اندیس‌های $j=1,2$ به دو نوع عملگر جابجایی‌گونه غیرخطی و اندیس‌های a,b به دو مد میدان اشاره دارد. اکنون می‌توان با استفاده از روابط (۶) و (۷) برای هر دو مد a,b میدان، عملگرهای $U_{j,ab}(\lambda,\alpha,\beta,f)$ را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$U_{j,ab}(\lambda,\alpha,\beta,f) = cos(\lambda)I_a I_b + i\,sin(\lambda)D_{j,a}(\alpha)\Pi_a D_{j,b}(\beta)\Pi_b \qquad (۱۶)$$

حال مشابه با قسمت‌های قبل، با تبدیل متغیرهای α به $\delta-\alpha$ و β به $\gamma-\beta$ در عملگرهای $U_{j,ab}(\lambda,\alpha,\beta,f)$ و کنش دو عملگر جابجایی‌گونه $D_{j,a}(\alpha)\,D_{j,b}(\beta)$ روی آن، عملگرهای $V_{j,ab}(\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\delta,f)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_{j,ab}(\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\delta,f) = D_{j,a}(\alpha)\,D_{j,b}(\beta)U_{j,ab}(\lambda,\delta-\alpha,\gamma-\beta,f) = Cos(\lambda)D_{j,a}(\alpha)D_{j,b}(\beta) + ie^{i\Im(\alpha\delta^*)}e^{i\Im(\beta\gamma^*)}Sin(\lambda)D_{j,a}(\delta)\Pi_a D_{j,b}(\gamma)\Pi_b \qquad (۱۷)$$

با کنش عملگرهای $V_{j,ab}(\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\delta,f)$ روی حالت خلاء میدان دومدی $|0\rangle_a|0\rangle_b$، حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده دومدی به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$V_{j,ab}(\lambda,\alpha,\beta,\gamma,\delta,f)|0\rangle = cos(\lambda)|\alpha,f\rangle_{j,a}|\beta,f\rangle_{j,b} + e^{i\Im(\alpha\delta^*)}e^{i\Im(\beta\gamma^*)}sin(\lambda)|\gamma,f\rangle_{j,a}|\delta,f\rangle_{j,b} \qquad (۱۸)$$

حال می‌توان با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای $\alpha,\beta,\gamma,\delta$، حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده دومدی متنوعی تولید کرد.

به عنوان مثال، با قراردادن $\gamma=\beta$ و $\delta=\alpha$ حالت همدوس غیرخطی درهم‌تنیده دومدی زیر تولید می‌شود:

$$|\Psi\rangle_{ENCSs}=cos(\lambda)|\alpha,f\rangle_{j,a}|\beta,f\rangle_{j,b}+i\ sin(\lambda)|\beta,f\rangle_{j,a}|\alpha,f\rangle_{j,b} \quad (۱۹)$$

همچنین، با قراردادن $\beta=-\alpha$ در رابطه بالا، به حالت همدوس غیرخطی درهم‌تنیده دومدی زیر دست می‌یابیم:

$$|\Psi\rangle_{ENCSs}=cos(\lambda)|\alpha,f\rangle_{j,a}|-\alpha,f\rangle_{j,b}+i\ sin(\lambda)|-\alpha,f\rangle_{j,a}|\alpha,f\rangle_{j,b} \quad (۲۰)$$

۵. تولید حالت‌های همدوس غیرخطی درهم-تنیده چندمدی

در این قسمت نیز با استفاده از روش ارائه شده در قسمت قبل عملگرهای تعمیم‌یافته $U_{j,ab\cdots z}(\lambda,\alpha,\beta,\cdots,\xi,\eta,f)$ را به شکل زیر معرفی می‌کنیم.

$$U_{j,ab\cdots z}(\lambda,\alpha,\beta,\cdots,\xi,\eta,f)=e^{i\lambda D_{j,a}(\alpha)\Pi_a D_{j,b}(\beta)\Pi_b\cdots D_{j,y}(\xi)\Pi_y D_{j,z}(\eta)\Pi_z} \quad (۲۱)$$

که اندیس‌های $j=1,2$ مانند قبل به دو نوع عملگر جابجایی‌گونه و اندیس‌های $a,b,\cdots,z$ به مدهای میدان اشاره دارد. حال می‌توان با استفاده از روابط (۶) و (۷) برای هر مد میدان، عملگرهای $U_{j,ab\cdots z}(\lambda,\alpha,\beta,\cdots,\xi,\eta,f)$ را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}U_{j,ab\cdots z}(\lambda,\alpha,\beta,\cdots,\xi,\eta,f)&=cos(\lambda)\mathrm{I}_a\mathrm{I}_b\cdots\mathrm{I}_z\\&+i\ sin(\lambda)D_{j,a}(\alpha)\Pi_a D_{j,b}(\beta)\Pi_b\cdots D_{j,z}(\eta)\Pi_z\end{aligned} \quad (۲۲)$$

با تبدیل متغیرهای α به $\mu-\alpha$، β به $\upsilon-\beta$، ... ، ξ به $\zeta-\xi$ و η به $\varsigma-\eta$ در عملگرهای $U_{j,ab\cdots z}(\lambda,\alpha,\beta,\cdots,\xi,\eta,f)$ و کنش عملگرهای جابجایی‌گونه غیرخطی $D_{j,a}(\alpha)\,D_{j,b}(\beta)\cdots D_{j,y}(\xi)\,D_{j,z}(\eta)$ روی آن، عملگرهای $V_{j,ab\cdots z}(\lambda,\alpha,\beta,\cdots,\xi,\eta,f)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&V_{j,ab\cdots z}(\lambda,\alpha,\beta,\cdots,\xi,\eta,f)\\&=D_{j,a}(\alpha)\,D_{j,b}(\beta)\cdots D_{j,y}(\xi)\,D_{j,z}(\eta)\\&\times U_{j,ab}(\lambda,\delta-\alpha,\gamma-\beta,\cdots,\zeta-\xi,\varsigma-\eta,f)\\&=cos(\lambda)D_{j,a}(\alpha)D_{j,b}(\beta)\cdots D_{j,y}(\xi)D_{j,z}(\eta)\\&+ie^{i\Im(\alpha\delta^*)}e^{i\Im(\beta\gamma^*)}\cdots e^{i\Im(\xi\zeta^*)}e^{i\Im(\eta\varsigma^*)}sin(\lambda)\\&D_{j,a}(\delta)\Pi_a D_{j,b}(\gamma)\Pi_b\cdots D_{j,y}(\zeta)\Pi_y D_{j,z}(\varsigma)\Pi_z\end{aligned} \quad (۲۳)$$

با کنش عملگرهای $V_{j,ab\cdots z}(\lambda,\alpha,\beta,\cdots,\xi,\eta,f)$ روی حالت خلاء میدان چندمدی $|0\rangle_a|0\rangle_b\cdots|0\rangle_z$، حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده چندمدی زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}&V_{j,ab}(\lambda,\alpha,\beta,\cdots,\eta,f)|0\rangle_a|0\rangle_b\cdots|0\rangle_z\\&=cos(\lambda)|\alpha,f\rangle_{j,a}|\beta,f\rangle_{j,b}\cdots|\eta,f\rangle_{j,z}\\&+e^{i\Im(\alpha\delta^*)}e^{i\Im(\beta\gamma^*)}\cdots e^{i\Im(\beta\gamma^*)}\\&\times i\ sin(\lambda)|\gamma,f\rangle_{j,a}|\delta,f\rangle_{j,b}\cdots|\varsigma,f\rangle_{j,z}\end{aligned} \quad (۲۴)$$

بنابراین، می‌توان با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای $\alpha,\beta,\cdots,\zeta,\varsigma$ حالت‌های همدوس غیرخطی درهم-تنیده چندمدی متنوعی تولید کرد.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از مروری کوتاه بر حالت‌های همدوس غیرخطی و عملگر پاریته، با استفاده از این عملگر و نیز عملگرهای جابجایی‌گونه غیرخطی که در نظریه حالت‌های همدوس غیرخطی مطرح شده‌اند، عملگرهای جدیدی را معرفی و با کنش آنها روی حالت خلاء میدان، برهم‌نهی‌ای از دو حالت همدوس غیرخطی و حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده دومدی را تولید کردیم. سپس نشان دادیم که با تعمیم روش ارائه شده در این مقاله می‌توان برهم‌نهی بیش از دو حالت همدوس غیرخطی و حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده چندمدی را نیز تولید کرد.

مراجع

[1] Yurke B, Stoler D, Phys. Rev. Lett. 571316 (1986).
[2] Schleich W, Pernigo M, Kien F L, Phys. Rev. A. **44**, 2172-2187(1991).
[3] Ekert A K, Phys. Rev. Lett.**67** 661 (1991).
[4] BennettC H, DiVincenzo D P, Nature**404** 247-255 (2000).
[5] Jeong H, Kim M S, Phys.Rev. A. **65** 042305-042310 (2002).
[6] Jeong H, Kim M S, Quantum Inf. Comput. **2** 208-221 (2002).
[7] Lund A P, Jeong H, Ralph T C, Kim M S, Phys. Rev. A. **70**020101-020104 (2004).
[8] Lance A M, Jeong H, Grosse N B, Symul T, Ralph T C, Lam P K,Phys. Rev.A. **73** 041801-041804 (2006).
[9] Ali S T, Roknizadeh R, Tavassoly M K, J. Phys. A: Math. Gen. **37** 4407 (2004).
[10]Messina A, Militello B, Napoli A, Proceeding of Institute of Mathematics of NAS of Ukrine**50** 881885 (2004).