

## حالت‌های چلاندۀ غیرخطی درهم‌تنیده و ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها

امیر کریمی<sup>(۱)</sup>؛ محمد کاظم توسلی<sup>(۲)</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

<sup>(۲)</sup> گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی، آباده، فارس

<sup>(۳)</sup> گروه پژوهشی فوتونیک، مرکز تحقیقات مهندسی، دانشگاه یزد، یزد

چکیده – در این مقاله، پس از مروری کوتاه بر حالت‌های چلاندۀ خطی و نیز نوع غیرخطی آن که اخیراً ارائه شده‌اند، به معرفی رده‌های خاص از حالت‌های چلاندۀ غیرخطی درهم‌تنیده پیوسته می‌پردازیم. در ادامه با محاسبه کمیت تلاقی به مطالعه مشخصه درهم‌تنیدگی این حالت‌ها پرداخته و درنهایت برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی آنها با مطالعه پارامتر مندل،تابع همبستگی مرتبه دوم و اثر چلاندگی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

کلید واژه: درهم‌تنیدگی، حالت‌های چلاندۀ غیرخطی درهم‌تنیده، حالت‌های غیرکلاسیکی.

## Entangled Nonlinear Squeezed States and Their Nonclassical Properties

A. Karimi<sup>(1),(2)</sup>; M. K. Tavassoly<sup>(1),(3)</sup>

<sup>(1)</sup> Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, University of Yazd, Yazd

<sup>(2)</sup> Department of Physics, Islamic Azad University of Abadeh, Fars

<sup>(3)</sup> Photonic & Research Group, Engineering Research Center, University of Yazd, Yazd

**Abstract-** In this paper, after a brief review on the linear and nonlinear squeezed states, which are recently presented we introduce a new kind of the continuous variable entangled nonlinear squeezed states. In the continuation, we study the entanglement characteristics of these states via the calculation of concurrence and finally, some of their nonclassical properties will be evaluated by studying the Mandel parameter, correlation function and squeezing effect.

**Keywords:** Entanglement, Entangled nonlinear squeezed states, Nonclassical states.

$$N_{f,+}^{-2}(\xi, f) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh r)^{2n} \left( \frac{[f(2n-1)]!!}{[f(2n)]!!} \right)^2 \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \quad (5)$$

$$N_{f,-}^{-2}(\xi, f) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh r)^{2n} \left( \frac{[f(2n)]!!}{[f(2n+1)]!!} \right)^2 \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!} \quad (6)$$

در اینجا، عبارت‌های  $[f(2n)]!!$  و  $[f(2n+1)]!!$  به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$[f(n)!!] = f(0)f(2)f(4)\dots f(2n) \quad (7)$$

$$[f(2n+1)]!! = f(1)f(3)f(5)\dots f(2n-1) \quad (8)$$

## ۲. حالت‌های چلاندۀ غیرخطی در هم‌تنیده و بررسی میزان در هم‌تنیدگی آنها

حالت‌های چلاندۀ غیرخطی در هم‌تنیده دومدی زوج و فرد را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$|\Psi(\xi, f)\rangle_{ENSS_{\pm}} = N_{ENSS_{\pm}}(\xi, f) \times |\xi, f\rangle_{\pm, a} | -\xi, f\rangle_{\pm, b} \pm |\xi, f\rangle_{\pm, a} | -\xi, f\rangle_{\pm, b} \quad (9)$$

که علامت‌های بالایی (+) و پایینی (-) به ترتیب به حالت‌های چلاندۀ غیرخطی زوج (۳) و فرد (۴) و اندیس‌های  $a$  و  $b$  به دو مد میدان اشاره دارد و ضرایب  $N_{ENSS_{\pm}}$  از شرط بهنجارش به دست می‌آیند. با درنظر گرفتن توابع غیرخطی مختلف  $f(n)$ ، حالت‌های چلاندۀ غیرخطی در هم‌تنیده متنوعی به وجود می‌آیند. در این مقاله با انتخاب تابع پنسون- سولومون  $S = \exp[1/2(\xi a^2 - \xi^* a^{*2})]$  روی حالت خلاء میدان به شکل زیر به دست می‌آیند [۳]:

۱. مقدمه  
دست‌یابی به حالت‌های جدید نور با ویژگی‌های غیر کلاسیکی به یکی از موضوعات مهم در اپتیک کوانتومی و نظریه اطلاعات کوانتومی تبدیل شده است. در این میان، چلاندگی به عنوان یکی از ویژگی‌های غیر کلاسیکی نور، توجه بسیاری را به خود جلب کرده و توسط بسیاری از محققان مورد بررسی قرار گرفته است [۱]. حالت میدان تابشی را چلاندۀ می‌نامیم، اگر تغییرات یکی از کوادراتورهای میدان نسبت به حالت همدوس، کاهش و دیگری افزایش یابد، البته به گونه‌ای که تغییرات هر دو کوادراتور میدان در رابطه عدم‌قطعیت هایزنبرگ صدق کند [۳، ۲]. به عنوان برخی از کاربردهای این حالت‌ها می‌توان به ارتباطات با نوافه کم [۴]، اندازه- گیری‌های دقیق [۵] و آشکارسازی امواج گرانشی [۶] اشاره کرد. حالت‌های چلاندۀ خطی زوج و فرد از کنش عملگر چلاندگی  $S = \exp[1/2(\xi a^2 - \xi^* a^{*2})]$  روی حالت خلاء میدان به شکل زیر به دست می‌آیند [۳]:

$$|\xi\rangle_+ = N_+(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!} e^{in\theta} (\tanh r)^n |2n\rangle \quad (1)$$

$$|\xi\rangle_- = N_-(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{\sqrt{(2n+1)!}} e^{in\theta} (\tanh r)^n |2n+1\rangle \quad (2)$$

که در آن  $N_+(\xi)$  و  $N_-(\xi)$  ضرایب بهنجارش و  $\xi = re^{i\theta}$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) هستند. اخیراً توسط یکی از نویسندهای مقاله، با تعمیم روشهای هم ارز کنش  $S = \langle \xi | 0 \rangle$  در حوزه عملگرهای خطی است، حالت‌های چلاندۀ غیرخطی زوج و فرد با جایگزینی عملگرهای نابودی  $a$  و آفرینش  $a^*$  توسط عملگرهای متناظر غیرخطی  $A = af(n)$  و  $A^\dagger = f(n)a^*$  و تأثیر آن روی حالت خلاء میدان به شکل زیر به دست آمده‌اند [۷]:

$$|\xi, f\rangle_+ = N_{f,+}(\xi, f) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{in\theta} (\tanh r)^n \times \frac{[f(2n-1)]!! \sqrt{(2n)!}}{[f(2n)]!! 2^n n!} |2n\rangle \quad (3)$$

$$|\xi, f\rangle_- = N_{f,-}(\xi, f) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{in\theta} (\tanh r)^n \times \frac{[f(2n)]!!}{[f(2n+1)]!!} \frac{2^n n!}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle \quad (4)$$

که ضرایب بهنجارش به ترتیب از روابط زیر به دست می‌آیند:

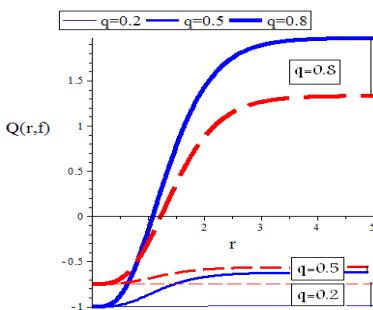
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{N} [\mu |\eta\rangle \otimes |\gamma\rangle + \nu |\xi\rangle \otimes |\delta\rangle] \quad (10)$$

به شکل زیر تعریف می‌شود [۹]:

$$C = \frac{2|\mu||\nu|}{N^2} \sqrt{(1-|P_1|^2)(1-|P_2|^2)} \quad (11)$$

$$P_1 = \langle \eta | \xi \rangle, \quad P_2 = \langle \delta | \gamma \rangle$$

که  $|\eta\rangle$  و  $|\xi\rangle$  حالت‌های بهنجار زیرسامانه ۱ و  $|\gamma\rangle$  و  $|\delta\rangle$  حالت‌های بهنجار زیرسامانه ۲ هستند. این معیار برای حالت‌هایی با بیشینه مقدار در هم‌تنیدگی برابر یک است. حال با مقایسه روابط (۹) و (۱۰) با یکدیگر و استفاده از رابطه (۱۱) ضریب تلاقی حالت‌های چلاندۀ غیرخطی زوج



شکل ۲- پارامتر مندل حالت‌های چلاندۀ غیر خطی (زوج : پیوسته، فرد : خط‌چین) درهم‌تنیده به ازای مقادیر مختلف  $q$ .

همچنین این حالت‌ها به‌ازای مقادیر  $q$  کوچک روی کل ناحیه میدان دارای ویژگی زیرپواسونی هستند که با افزایش  $q$  از پهنه‌ای آن ناحیه از میدان که دارای ویژگی زیرپواسونی است، کاسته می‌شود و به نواحی کوچک  $r$  محدود می‌شود. علاوه بر آن، حالت چلاندۀ غیر خطی زوج درهم‌تنیده به ازای مقادیر  $q$  کوچک، از ویژگی زیرپواسونی بیشتری نسبت به حالت مشابه فرد به ازای  $r$  یکسان برخوردار بوده و با افزایش  $q$ ، ویژگی زیرپواسونی هر دو حالت (به جزء در نواحی  $r$  کوچک) تقریباً یکی شده و ویژگی زیرپواسونی حالت چلاندۀ غیر خطی فرد درهم‌تنیده به ازای مقادیر  $q$  بزرگ، در ناحیه‌ای بسیار کوچکی از حالت مشابه زوج آن پیشی می‌گیرد.

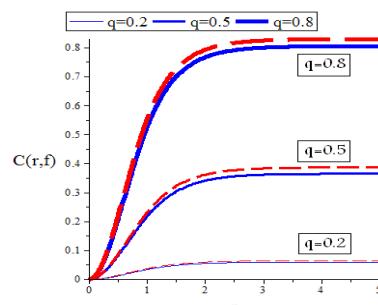
### ۲.۳. همبستگی مدها

در این قسمت، میزان همبستگی دو مد حالت‌های چلاندۀ غیر خطی زوج و فرد درهم‌تنیده (۹) را با محاسبه تابع همبستگی مرتبه دوم که به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۱] مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

$$g_{ab}^{(2)}(0) = \frac{\langle a^\dagger a b^\dagger b \rangle}{\langle a^\dagger a \rangle \langle b^\dagger b \rangle} \quad (13)$$

چنانچه  $\langle g_{ab}^{(2)}(0) \rangle < 1$  باشد، حالت‌های چلاندۀ غیر خطی زوج و فرد درهم‌تنیده را غیرکلاسیکی و دو مد متناظر با آنها را ناهمبسته می‌گوییم. در شکل ۳، تنها برای حالت‌های چلاندۀ غیر خطی فرد درهم‌تنیده به ازای تمامی مقادیر  $r$  و  $q$   $\langle g_{ab}^{(2)}(0) \rangle < 1$  هستند. بنابراین، رفتار غیرکلاسیکی تنها در این حالت‌ها (فرد)، ظاهر شده و بین دو مد آنها ناهمبستگی وجود دارد.

و فرد درهم‌تنیده را به دست آورده و بر حسب  $r$  رسم می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌کنیم در هر دو مورد حالت‌های چلاندۀ غیر خطی زوج و فرد درهم‌تنیده، میزان درهم‌تنیدگی از صفر شروع شده و با افزایش  $q$  برای مقادیر  $q$  ثابت و با افزایش  $q$  در  $r$  ثابت، مقدار درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد و به سمت مقداری ثابت میل می‌کند. علاوه بر این، حالت چلاندۀ غیر خطی فرد درهم‌تنیده از میزان درهم‌تنیدگی بیشتری نسبت به حالت مشابه زوج به ازای  $q$  یکسان برخوردار است.



شکل ۱- ضریب تلاقی حالت‌های چلاندۀ غیر خطی (زوج : پیوسته، فرد : خط‌چین) درهم‌تنیده به ازای مقادیر مختلف  $q$ .

## ۳. ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های چلاندۀ

### غیر خطی درهم‌تنیده

#### ۳.۱. آمار زیرپواسونی

به منظور مطالعه ویژگی‌های آماری هر حالت کوانتومی پارامترهای گوناگونی معرفی شده است. به عنوان رایج‌ترین این پارامترها، می‌توان به پارامتر مندل  $Q$  اشاره کرد که به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۰]:

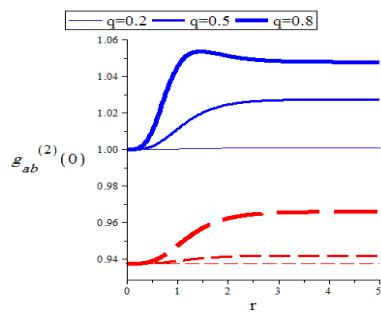
$$Q = \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle - \langle a^\dagger a \rangle^2}{\langle a^\dagger a \rangle} \quad (14)$$

$Q > 0$  ( $Q < 0$ ) بیان‌گر آمار فراپواسونی (زیرپواسونی) است. آمار زیرپواسونی یکی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت‌های کوانتومی است. قابل ذکر است که تمامی مقادیر چشم‌داشتی لازم در این قسمت، نسبت به حالت‌های چلاندۀ غیر خطی زوج و فرد درهم‌تنیده (۹) محاسبه می‌شوند. با بررسی شکل ۲ مشاهده می‌کنیم که در هر دو مورد حالت‌های چلاندۀ غیر خطی زوج و فرد درهم‌تنیده، با افزایش  $r$  برای  $q$  ثابت و همچنین با افزایش  $q$  در  $r$  ثابت ویژگی زیرپواسونی این حالت‌ها کاهش می‌یابد.

حضور تابع غیرخطی  $f(n)$  رده‌ی وسیعی از حالت‌های چلاندۀ غیرخطی درهم‌تنیده را معرفی کردیم. به عنوان نمونه‌ای ویژه از تابع پنسون–سولومون  $f_q(n) = q^{1-n}$  در محاسبات استفاده کردیم. با ارزیابی کمیت تلاقی نشان دادیم که در هر دو مورد حالت‌های چلاندۀ غیرخطی زوج و فرد درهم‌تنیده، با افزایش  $r$  در  $q$  ثابت و با افزایش  $q$  در  $r$  ثابت، مقدار درهم‌تنیدگی از صفر شروع شده، افزایش یافته و درنهایت به مقدار ثابتی می‌رسد. علاوه بر آن، حالت چلاندۀ غیرخطی فرد درهم‌تنیده از میزان درهم‌تنیدگی بیشتری نسبت به حالت مشابه زوج به ازای  $q$  یکسان برخوردار است. پس از مطالعه برخی از ویژگی‌های غیرکلاسیکی مانند: آمار زیرپواسونی، تابع همبستگی مرتبه دوم و چلاندگی، دیدیم که رفتار غیرکلاسیکی در دو ویژگی همبستگی مدها تنها در حالت‌های چلاندۀ غیرخطی فرد درهم‌تنیده و در آمار کوانتموی در هر دو حالت زوج و فرد، آمار زیرپواسونی ظاهر می‌شود. ویژگی زیرپواسونی هر دو حالت چلاندۀ غیرخطی زوج و فرد درهم‌تنیده، با افزایش  $r$  برای مقدار  $q$  ثابت و با افزایش  $q$  در  $r$  ثابت، کاهش یافته و از پهنانی ناحیه‌ای از میدان که دارای ویژگی زیرپواسونی است، نیز با افزایش  $q$  کاسته شده و به ناحیه  $r$  های کوچک محدود می‌شود. علاوه بر آن، حالت چلاندۀ غیرخطی فرد درهم‌تنیده از ویژگی زیرپواسونی بیشتری نسبت به حالت مشابه زوج به ازای  $q$  یکسان برخوردار است.

### مراجع

- [1] Hu X, Nori F 1996 Phys. Rev. B **53** 2419.
- [2] Scully M O and Zubairy M S, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [3] Gerry C and Knight P, *Introductory Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [4] Caves C M, 1981 Phys. Rev. D **23** 1693.
- [5] Xiao M, Wu L A and Kimble H J, 1987 Phys. Rev. Lett. **59** 278.
- [6] Walls D 1983 Nature. **306** 141.
- [7] Noormandipour A and Tavassoly M K 2014 Commun. Theor. Phys. **61** 521.
- [8] Penson K and Solomon A 1999 J. Math. Phys. **40** 2354.
- [9] Kuang L M and Zhou L 2003 Phys. Rev. A **68** 043606.
- [10] Mandel L 1979 Opt. Lett. **4** 205.
- [11] Paul H 1982 Rev. Mod. Phys. **54** 1061.



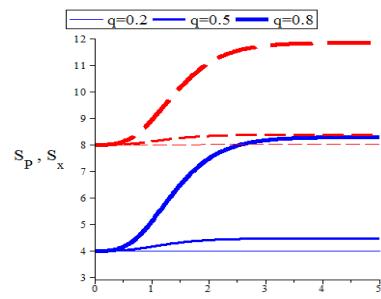
شکل ۳- ضریب همبستگی مرتبه دوم حالت‌های چلاندۀ غیرخطی (زوج: پیوسته، فرد: خط‌چین) درهم‌تنیده به ازای مقادیر مختلف  $q$ .

### ۳.۳. چلاندگی

با معروفی دو عملگر هرمیتی  $x=(a+a^\dagger)/\sqrt{2}$  و  $p=(a-a^\dagger)/\sqrt{2}i$  با رابطه جابجایی  $[x, p]=i$ ، پارامترهای چلاندگی  $s_p, s_x$  به شکل  $1 - 2(\Delta x_j)^2 = 2\langle \Delta x_j \rangle^2$  (شکل ۴)، تعریف می‌شوند. این پارامترها را می‌توان به شکل زیر نیز بازنویسی کرد:

$$s_{x(p)} = 2\langle a^\dagger a \rangle \pm \langle a^2 \rangle \pm \langle a^{\dagger 2} \rangle \mp \langle a \rangle^2 \mp 2\langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle \quad (14)$$

یک حالت کوانتموی را در  $x_j$  چلاندۀ می‌گوییم، چنانچه برای آن حالت نامساوی  $0 < s_{x_j} < 1$  برقرار باشد.



شکل ۴- پارامترهای چلاندگی حالت‌های چلاندۀ غیرخطی (زوج: پیوسته، فرد: خط‌چین) درهم‌تنیده به ازای مقادیر مختلف  $q$ .

با رسم پارامترهای چلاندگی  $s_p, s_x$  بر حسب  $r$  در شکل ۴ هیچ‌گونه چلاندگی در هیچ‌یک از پارامترهای  $x$  و  $p$  مشاهده نمی‌شود. قابل ذکر است که در شکل ۴، به ازای هر مقدار  $q$ ، منحنی‌های  $s_p, s_x$  حالت‌ها، بر روی هم منطبق شده است.

### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از مروری کوتاه بر حالت‌های چلاندۀ خطی و نیز غیرخطی که اخیراً معرفی شده‌اند، با توجه به