



بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران  
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران  
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی



## اندازه‌گیری ضریب شکست و ارتفاع لایه‌های نازک شفاف با استفاده از پراش فرنل از پله فازی

مرتضی جعفری سیاوشانی<sup>۱\*</sup>، محمد تقی توسلی<sup>۲,۳</sup>، احسان احدی اخلاقی<sup>۱,۳</sup> و سید روح‌الله حسینی<sup>۲</sup>

۱- دانشکده فیزیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، کد پستی ۴۵۱۹۵-۶۶۷۳۱.

۲- دانشکده فیزیک، دانشگاه تهران، تهران.

۳- مرکز پژوهشی اپتیک، دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، زنجان، کد پستی ۴۵۱۹۵-۶۶۷۳۱.

چکیده - تعیین دقیق ثابت‌های نوری لایه‌های نازک، از چالش‌های موجود در علوم و صنایع مدرن به حساب می‌آید. در این مقاله روشی جدید برای به‌دست آوردن ضریب شکست و ضخامت لایه‌های نازک دی‌الکتریک، ارائه داده‌ایم. این روش بر پراش فرنل از پله فازی عبوری استوار است. با ثبت نقش پراش پله فازی در زوایای مختلف فرودی و تحلیل آن‌ها، نمودار نمایانی بر حسب زاویه فرود به‌دست می‌آید. ضریب شکست و ارتفاع، از طریق برازش داده‌های شبیه‌سازی شده به منحنی تجربی (نمایانی بر حسب زاویه فرودی) تعیین می‌شوند. با استفاده از این روش، دقت اندازه‌گیری ضریب شکست و ضخامت لایه‌های نازک میکرومتری به ترتیب ۰/۵ و ۰/۱ درصد است.

کلید واژه- پله فازی، پراش فرنل، ضخامت، ضریب شکست، لایه‌های نازک.

## Measuring refractive index and thickness of transparent thin films using Fresnel diffraction from phase step

M. Jafari Siavashani<sup>1,\*</sup>, M. T. Tavassoly<sup>2,3</sup>, E. A. Akhlaghi<sup>1,3</sup> and S. R. Hosseini<sup>2</sup>

۱- Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, ۴۵۱۳۷-۶۶۷۳۱, Iran.

۲- Department of Physics, Faculty of Science, University of Tehran, North Kargar Avenue, Tehran, Iran.

۳- Optics Research Center, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, ۴۵۱۳۷-۶۶۷۳۱, Iran.

Abstract- Measuring optical parameters of thin films with high accuracy is a challenge in modern science and industry. We introduce a new method to obtain refractive index and thickness of transparent dielectric layer. This method is based on Fresnel diffraction from the phase step in transmission. By recording and analyzing the diffraction pattern versus incident angle, the diagram of visibility versus incident angle is obtained. Therefore by fitting simulated data to experimental ones (visibility versus incident angle), refractive index and height of phase step is determined. The uncertainties of determination of refractive index and thickness are about ۰.۵% and ۰.۱%, respectively.

Keywords: Fresnel Diffraction, Phase step, Thickness, Thin films, Refractive index.

## ۱- مقدمه

امروزه روش‌های بسیاری برای تعیین ضریب شکست و ضخامت‌سنجی مواد به کار می‌رود. به عنوان مثال می‌توان از روش خودهم‌سوسازی (روش منشور) [۱]، روش تداخل‌سنجی [۲] و روش بیضی‌سنجی [۳] نام برد. روش‌های مورد اشاره از دقت‌های زیادی در تعیین پارامترهای نوری و ضخامت‌سنجی برخوردارند. همچنین از معایب این روش‌ها می‌توان به تهیه دشوار نمونه، احتیاج به وسایل اپتیکی دقیق و گران‌قیمت و محدوده کاری کوچک اشاره نمود. در دهه اخیر و با تلاش توسلی و همکاران، پراش از پله فازی مورد مطالعه قرار گرفته است [۴-۹]. به دلیل اهمیت فراوان تعیین ضریب شکست لایه‌های نازک و همچنین ضخامت‌سنجی آن‌ها، در این مقاله روشی جدید برای تعیین هم‌زمان این دو پارامتر ارائه می‌شود. به عبارت روشن‌تر نمودار نمایشی تجربی حاصل از پراش از پله فازی بر حسب زاویه فرود تعیین می‌گردد. از برآزش نمودار نظری نمایشی بر حسب زاویه فرود (به نمودار تجربی)، ضریب شکست و ضخامت لایه به دست می‌آید.

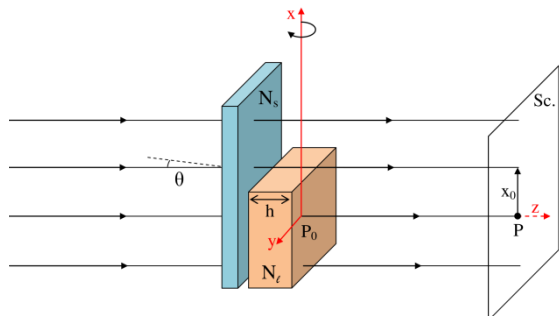
در این مقاله، ابتدا مبانی نظری پراش از پله فازی ارائه می‌گردد. در ادامه روش جدید تعیین ضریب شکست و ضخامت‌سنجی لایه‌های نازک توضیح داده می‌شود. در انتها چیدمان آزمایش و نتایج تجربی مطرح می‌شوند.

## ۲- مبانی نظری

هنگامی که جبهه‌موج در ناحیه‌ای دچار یک تغییر ناگهانی گردد، پراشی از نوع فرنل مشاهده می‌شود [۴]. این تغییر ناگهانی می‌تواند به دلیل بازتاب از یک پله فیزیکی و یا عبور از تغه‌ای شفاف باشد، که در لبه آن تغییر ناگهانی ضخامت و یا ضریب شکست رخ می‌دهد. با تغییر زاویه فرودی، اختلاف فاز باریکه‌های عبور کرده از دو سمت پله، تغییر می‌کند. همچنین با تغییر فاز به صورت تناوبی، نقش پراش تکرار می‌شود. با تحلیل این رفتار می‌توان ثابت‌های نوری و ضخامت پله فازی را اندازه‌گیری کرد.

فرض می‌شود باریکه‌ای تک‌فام و موازی به پله فازی شفاف می‌تابد. این پله در حالت کلی از زیرلایه‌ای با ضریب شکست  $N_s$ ، یک لایه بسیار نازک هوا و لایه فوقانی با ضریب شکست  $N_t$  تشکیل شده است (شکل ۱). ارتفاع این لایه برابر  $h$  فرض شده است. قابل اثبات است، ضخامت لایه هوا و زیرلایه، تاثیری در نتایج ندارند. به دلیل

تغییر ضخامت و ضریب شکست در لبه پله فازی، دو باریکه عبور کرده از وجه‌های بالا و پایین پله دچار اختلاف فاز ناگهانی می‌شوند. در نتیجه بر روی صفحه مشاهده (Sc.) الگوی پراش قابل رویت است.



شکل ۱: نمایی از یک پله فازی، که از قرار گرفتن لایه‌ای نازک بر روی زیرلایه تشکیل شده است. در بسیاری از روش‌های لایه‌نشانی، لایه‌ای نازک از هوا بین دو سطح زیرلایه و لایه قرار می‌گیرد (که در شکل بالا لحاظ شده است).

دامنه میدان پراشیده شده از این پله فازی در نقطه دل‌خواه  $P$  از صفحه مشاهده را می‌توان با استفاده از انتگرال فرنل-کیرشلف به صورت،

$$u_P = AK \left[ t_d \int_{-\infty}^{x_0} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} + t_u e^{-i\phi} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \right], \quad (1)$$

بیان کرد [۱۰]. در این رابطه،  $A$  دامنه باریکه فرودی و  $K$  ضریب انتشار است.  $t_u$  و  $t_d$  به ترتیب ضرایب عبور قسمت پایین و بالا از لبه فازی هستند. همچنین  $k$  عدد موج و  $r$  اندازه بردار موقعیت نقطه  $P$  از مبدا مختصات ( $P_0$ ) است. اختلاف فاز دو باریکه عبور کرده از قسمت پایین و بالای لبه از رابطه،

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} h \left[ \sqrt{N_t^2 - \sin^2(\theta)} - \cos(\theta) \right], \quad (2)$$

به دست می‌آید [۸ و ۹]. در این رابطه،  $\theta$  زاویه باریکه فرودی نسبت به خط عمود بر سطح پله فازی و  $\lambda$ ، طول موج باریکه تک‌فام فرودی است. با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب،

$$u_0 \equiv \frac{KA}{\sqrt{r}} e^{-ikr} \quad v_i \equiv \sqrt{\frac{2r}{\lambda}} x_i; \quad i = 0, 1, 2 \quad (3)$$

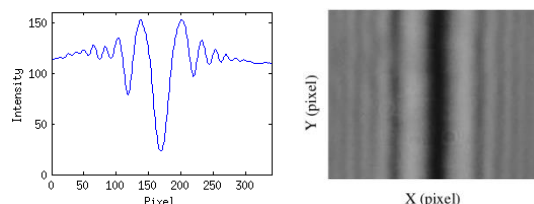
$$\int_0^{v_0} e^{-i\pi v^2/2} dv = C_0 + iS_0,$$

دامنه میدان پراشی (رابطه ۱) به صورت ساده‌تری بیان می‌شود [۴]. در این روابط  $v_i$  بیان‌گر فاصله‌های به‌هم‌جار از مبدا مختصات است.  $C_0$  و  $S_0$  نیز توابع انتگرال فرنل هستند. بنابراین با استفاده از رابطه  $I = uu^*$ ، الگوی شدت پراشیده شده به صورت زیر به دست می‌آید [۸]:

(۴)

$$I_p = I_0 t_d t_u \left[ \cos^2 \frac{\phi}{2} + 2(C_0^2 + S_0^2) \sin^2 \frac{\phi}{2} - (C_0 - S_0) \sin \phi \right] + \frac{I_0}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} + C_0^2 + S_0^2 \right) (t_d - t_u)^2 + (C_0 + S_0)(t_d^2 - t_u^2) \right]$$

در رابطه (۴)،  $I_0$  اندازه شدت فرودی است (مقداری ثابت). شکل ۲ منحنی تجربی شدت الگوی پراشیده شده از پله فازی است که با رابطه (۴) در تطابق است.



شکل ۲: الگوی پراش حاصل از پله‌ای با ارتفاعی در حدود ۳ میکرومتر. اختلاف فاز در این حالت  $5\pi$  است.

با تغییر زاویه فرود  $\theta$ ، اختلاف فاز  $\phi$  تغییر می‌کند (رابطه (۲)). تغییر در مقدار  $\phi$  باعث ایجاد الگوی پراش جدیدی از پله فازی می‌شود (رابطه (۴)). به عبارت دیگر با تغییر پیوسته زاویه باریکه فرودی، الگوی پراش نیز به صورت پیوسته تغییر می‌کند. این تغییر دارای تناوب  $2\pi$  است. با استفاده از رابطه (۴) و منحنی شدت، نمایانی میانگین سه فریز مرکزی الگوی پراش به صورت زیر معرفی می‌شود [۴]:

$$V = \frac{\frac{I_{L,max} + I_{R,max}}{2} - I_{C,min}}{\frac{I_{L,max} + I_{R,max}}{2} + I_{C,min}} \quad (5)$$

در رابطه فوق  $I_{C,min}$  شدت فریز تاریک مرکزی،  $I_{L,max}$  و  $I_{R,max}$  به ترتیب شدت فریزهای روشن سمت چپ و راست از فریز تاریک مرکزی هستند (شکل ۲). ضرایب فرنل  $t_d$  و  $t_u$  در هر زاویه به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱۰]:

$$t_p = \frac{2n \cos(\theta)}{n^2 \cos(\theta) + \sqrt{n^2 - \sin^2(\theta)}}; \quad n \equiv \frac{N}{N'} \quad (6)$$

$$t_s = \frac{2 \cos(\theta)}{\cos(\theta) + \sqrt{n^2 - \sin^2(\theta)}}; \quad n \equiv \frac{N}{N'}$$

زیروندهای  $p$  و  $s$  به ترتیب قطبش‌های موازی و عمود بر صفحه فرود را معین می‌کنند. در روابط فوق  $N$  ضریب شکست محیطی است که باریکه نور به آن وارد می‌شود.  $N'$  نیز ضریب شکست محیط اولیه باریکه فرودی است. به منظور تعیین ضریب شکست و ارتفاع یک پله فازی (به مانند شکل ۱)، ابتدا نمودار نمایانی بر حسب زاویه فرود را به دست می‌آوریم. به عبارت دقیق‌تر زاویه فرود را با گام‌هایی مشخص تغییر می‌دهیم. به دلیل این تغییرات،

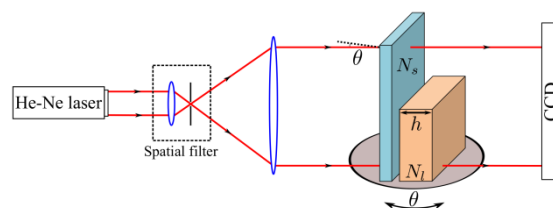
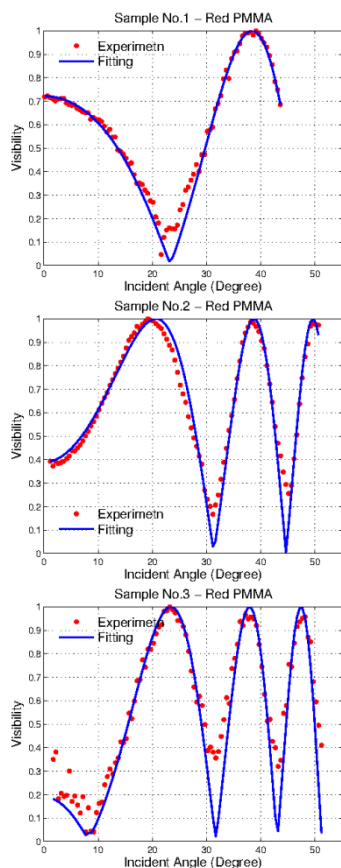
مقدار اختلاف فاز و در نتیجه الگوی شدت نیز تغییر می‌کنند. سپس با استفاده از رابطه (۵) نمایانی مربوط به الگوی پراش در هر زاویه مشخص به دست می‌آید. در ادامه توسط یک برنامه کامپیوتری دو مقدار ضریب شکست و ارتفاع با گام‌هایی کوچک تغییر می‌کنند. در هر گام شدت الگوی پراش و نمایانی آن از روابط (۴) و (۵) محاسبه شده، سپس نمودار نمایانی بر حسب زاویه فرود توسط برنامه به دست می‌آید. در انتها داده‌های شبیه سازی شده نمایانی بر حسب زاویه فرود با مقادیر تجربی مقایسه می‌شوند. جواب نهایی نموداری است که کمترین اختلاف را از داده‌های تجربی دارد. به عبارت دیگر، ضریب شکست و ارتفاعی که در ازای آن‌ها داده‌های نمایانی شبیه‌سازی شده و داده‌های نمایانی تجربی کمترین میزان اختلاف را دارند، جواب نهایی است. به بیان ریاضی، برای هر نمودار شبیه‌سازی شده مقدار عبارت میانگین قدرمطلق خطاها (MAE) محاسبه می‌شود:

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |V_s(\theta_i) - V_e(\theta_i)| \quad (7)$$

جواب نهایی، ضریب شکست و ارتفاعی است که کمترین مقدار MAE را به خود اختصاص دهند. در رابطه (۷)،  $V_s$  و  $V_e$  به ترتیب داده‌های به دست آمده از شبیه‌سازی کامپیوتری و نتایج تجربی هستند. با استفاده از روابط ریاضی اثبات کرده‌ایم که جواب به دست آمده از این روش یکتا است. بنابراین انتظار داریم با استفاده از یک چیدمان ساده اپتیکی (ارائه شده در بخش بعد) و با استفاده از روش مطرح شده، ضریب شکست لایه‌ها نازک (میکرومتری) را با دقت رقم سوم بعد از اعشار و ارتفاع آن را با دقتی در محدوده ۱۰ نانومتر به دست آوریم.

### ۳- نتایج تجربی

چیدمان آزمایش با پله فازی به ترتیب از یک منبع نور (لیزر هلیوم-نئون)، فیلتر فضایی، عدسی باریکه گستر، پله فازی شفاف، گونیومتر و CCD تشکیل شده است (شکل ۳). نور موازی شده بعد از عدسی باریکه گستر به نمونه شفاف می‌تابد و طرح پراش ایجاد شده توسط CCD هشت بیت ثبت می‌گردد. نمونه بروی یک گونیومتر قرار دارد که با استفاده از آن می‌توان پله فازی را با گام‌هایی معین و دقیق چرخاند (گونیومتر دارای دقت ۳۰ ثانیه قوسی است).



شکل ۳: نمایی از چیدمان آزمایش پراش فرنل از پله فازی عبوری. پله فازی مورد نظر از جنس پلیمر شفاف PMMA است. ابتدا این ماده را در حلال دی کلرومتان حل نموده و سپس توسط روش Dip coating بروی لام‌های تمیز شده، لایه نشانی می‌کنیم. ضخامت این لایه‌های پلیمری در محدوده ۱ الی ۲۰ میکرومتر هستند. به صورت معمول لایه‌های میکرومتری دارای افت و خیزهایی از مرتبه یک درصد در ضخامت خود هستند. بنابراین ضریب شکست از مرتبه سه الی چهار رقم بعد از اعشار قابل تعیین است. در ادامه با استفاده از یک محلول پلیمری (با غلظتی مشخص)، سه نمونه با ضخامت‌های متفاوت ساخته‌ایم. انتظار داریم با استفاده از روشی که معرفی نموده‌ایم ضریب شکست سه نمونه را برابر و ارتفاع‌های آن‌ها را متفاوت به دست آوریم. هم‌خوانی ضرایب شکست تعیین شده با مقادیرهای معتبر جهانی این ماده، تصدیق کننده این روش است. نتایج نهایی به دست آمده، در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند. همچنین داده‌های تجربی و بهترین نمودارهای به دست آمده از شبیه سازی در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند.

شکل ۴: منحنی نمایشی بر حسب زاویه فرود. نقاط، نشان دهنده داده‌های تجربی (پس از حذف نمودن نوفه‌های زمینه) و خط ممتد، بهترین نمودار نظری برازش شده است.

جدول ۱: نتایج به دست آمده برای ضریب شکست و ضخامت نمونه‌ها پلیمری با استفاده از روش پله فازی.

شماره نمونه	ضریب شکست	ضخامت (میکرومتر)
۱	۱,۵۰۰	۵,۸۹
۲	۱,۴۹۱	۱۰,۴۸
۳	۱,۵۰۷	۱۲,۳۹

### سیاس‌گذاری

لازم است از آقای دکتر مهاجرانی و خانم اسلامی بابت کمک در تهیه لایه‌ها به صورت پله و در اختیار گذاشتن نمونه‌ها پلیمری تشکر نماییم.

### مراجع

[1] Cheng, C.C. *Refractive index measurement by prism autocollimation*. **Am. J. Phys.**, ۸۲(۳):۲۱۴-۱۶, ۲۰۱۴.  
 [2] Betzler, K. et al. *Interferometric measurement of refractive indices*. **Rev. Sci. Instrum.**, ۵۹(۴):۶۵۲-۳, ۱۹۸۸.  
 [3] Jung, J. et al. *Ellipsometry*. Aalborg University, Denmark, ۲۰۰۴.  
 [4] Amiri, M. and Tavassoly, M.T. *Fresnel diffraction from 1D and 2D phase steps in reflection and transmission modes*. **Opt. Commun.**, ۲۷۲(۲):۳۴۹-۳۶۱, ۲۰۰۷.  
 [5] Tavassoly, M.T. et al. *Application of Fresnel diffraction from a phase step to the measurement of film thickness*. **Appl. Opt.**, ۴۸(۲۹):۵۴۹۷-۵۰۱, ۲۰۰۹.  
 [6] Tavassoly, M.T. et al. *Optical diffractometry*. **J. Opt. Soc. Am. A. Opt. Image Sci. Vis.**, ۲۶(۳):۵۴۰-۷, ۲۰۰۹.  
 [7] Tavassoly, M.T. and Saber, A. *Optical refractometry based on Fresnel diffraction from a phase wedge*. **Opt. Lett.**, ۳۵(۲۱):۳۶۷۹-۸۱, ۲۰۱۰.  
 [8] Tavassoly, M.T. et al. *Applications of Fresnel diffraction from the edge of a transparent plate in transmission*. **Appl. Opt.**, ۵۱(۳۰):۷۱۷۰-۵, ۲۰۱۲.  
 [9] Tavassoly, M.T. et al. *High precision refractometry based on Fresnel diffraction from phase plates*. **Opt. Lett.**, ۳۷(۹):۱۴۹۳-۵, May ۲۰۱۲.  
 [10] Pedrotti, F. and Pedrotti, L. *Introduction to optics*. Prentice-Hall International Inc., USA, 2nd ed., ۱۹۹۳.

### ۴- نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج به دست آمده، پراش فرنل از پله فازی شفاف روشی دقیق، ساده و کم هزینه به منظور تعیین ضریب شکست و ضخامت لایه‌های شفاف میکرومتری است. در این مقاله با استفاده از روش جدید ارائه شده بر اساس پراش از پله فازی، ضخامت و ضریب شکست لایه‌های نازک (میکرومتری) را به ترتیب با دقت‌های ۰,۱ و ۰,۵ درصد اندازه‌گیری کردیم.