



بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران  
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران  
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی



## درهمتنیدگی مدهای اپتیکی و ریزموج ابررسانا در تقریب موج چرخان

عاطفه الفخانی<sup>۱</sup>، مجتبی مظاهری<sup>۲</sup>، وحید فیاض<sup>۱</sup>

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، همدان، ایران.

۲. دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران.

چکیده - ما در این مقاله سامانه‌ای شامل مدهای اپتیکی و ریزموج ابررسانا را مطالعه می‌کنیم که از طریق نوسانگر مکانیکی با همدیگر برهمکنش دارند. کاواک‌های اپتیکی و ریزموج به ترتیب در باندهای واوکوی آبی و قرمز راه‌اندازی شده‌اند. ما نشان می‌دهیم که سامانه، درهمتنیدگی قوی بین مدهای اپتیکی و ریزموج در رژیم موج چرخان و مد بد کاواک از خود بروز می‌دهد.

کلید واژه - تقریب موج چرخان، درهمتنیدگی، کاواک اپتیکی، کاواک ریزموج، معادله لانژوین کوانتومی.

## Entangling optical and superconducting microwave cavity modes in rotating wave approximation

Atefeh Alefkhani<sup>1</sup>, Mojtaba Mazaheri<sup>2</sup>, Vahid Fayaz<sup>1</sup>

1. Department of Physics, Faculty of Sciences, Hamedan Branch, Islamic Azad University, Hamedan, Iran.

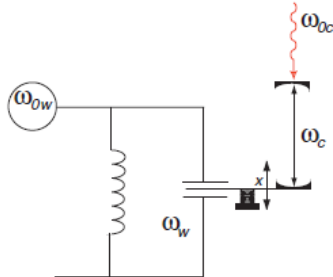
2. Department of Science, Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran.

Abstract-In this paper, we consider a system containing an optical cavity and a superconducting microwave cavity interacting via a nanomechanical resonator. Optical and microwave cavity modes are subsequently set at the blue-detuned and red-detuned regimes. We show the system exhibits a strong entanglement between optical and microwave modes in the bad cavity mode and rotating wave approximation.

Keywords: Rotating wave approximation, Entanglement, Optical cavity, Microwave cavity, Quantum Langevin equation.

۱. مقدمه

اندازی کاواک اپتیکی را نشان می‌دهد که در آن  $p_c$  توان راه‌اندازی،  $k_c$  ضریب میرایی کاواک اپتیکی،  $w_{oc}$  فرکانس لیزر راه‌اندازی،  $m$  جرم مؤثر مد مکانیکی و  $L$  طول کاواک اپتیکی فابری-پرو است [۴].



شکل ۱: نمایش دستگاه مورد مطالعه یک کاواک ریزموج عنصرانباشته با یک خازن سراسخوانه‌ای مجزای ساکن جفت شده، همچنین کاواک اپتیکی تشکیل شده از یک آینه ورودی و یک خازن سراسخوانه‌ای که به لحاظ اپتیکی پوشش‌دهی شده است [۴].

منبع راه‌اندازی پیوسته کاواک ریزموج ابررسانا با نسبت میرایی  $k_w$  به صورت پتانسیل الکتریکی  $e(t) = -i\sqrt{2\hbar\omega_w}LE_\omega(e^{i\omega_w t} - e^{-i\omega_w t})$  نوسانگر مکانیکی با کاواک ریزموج جفت می‌شود زیرا ظرفیت خازن  $(C_0(x))$  تابعی از مکان تشدیدگر است. ما این تابع را حول موقعیت تعادلی نوسانگر مکانیکی در فاصله  $d$  بسط می‌دهیم [۴]. هامیلتونی معادله (۱) را می‌توان برحسب افزایش و کاهش میدان کاواک ریزموج ابررسانا،  $b, b^+$  و موقعیت بدون بعد و عملگرهای تکانه و مکان نوسانگر مکانیکی،  $p$  و  $q$  ( $[q, p] = i$ ) مجدداً به صورت زیر نوشت [۴]:

$$H = \hbar\omega_w b^+ b + \hbar\omega_c a^+ a + \frac{\hbar\omega_m}{2}(\hat{p}^2 + \hat{q}^2) - \frac{\hbar G_{0\omega}}{2} \hat{q} (b + b^+)^2 - \hbar G_{oc} \hat{q} a^+ a - i\hbar E_\omega (e^{i\omega_w t} - e^{-i\omega_w t}) (b + b^+) + i\hbar E_c (a^+ e^{-i\omega_c t} - a e^{i\omega_c t}) \quad (2)$$

بنابراین می‌توانیم معادله‌های لانژوین کوانتومی غیر خطی را در تصویر برهمکنش  $H_0 = \hbar\omega_w b^+ b + \hbar\omega_c a^+ a$  بدست آوریم که در آن عملگرهای هایزنبرگ را به صورت دو بخش مستقل از زمان و وابسته به زمان در نظر می‌گیریم [۵]. مقادیر مستقل از زمان به ترتیب به صورت  $q_s = G_{0c}|\alpha_s|^2 + G_{0w}|\beta_s|^2/\omega_m$ ،  $p_s = 0$  به دست می‌آیند. پارامترهای  $\alpha_s$  و  $\beta_s$  به ترتیب دامنه میدان کاواک اپتیکی و میدان کاواک ریزموج در حالت پایا

درهمتنیدگی می‌تواند به عنوان بخشی از طرح‌های بازخوانی در پردازش اطلاعات کوانتومی بکار رود [۱]. در این مقاله سیستم تشدیدگر نانومکانیکی متصل به کاواک اپتیکی و کاواک ابررسانا معرفی می‌شود که شامل سه مد مکانیکی، اپتیکی و ریزموج ابررساناست که به صورت دو به دو درهمتنیده شده‌اند. تشدیدگرهای نانومکانیکی می‌توانند به طور مؤثر با تعداد زیادی از ابزارهای گوناگون جفت شوند و بنابراین ابزاری مهم برای تشخیص وجوه مشترک کوانتومی هستند و قادر به ذخیره، انتقال و تقسیم اطلاعات کوانتومی می‌باشند. ما دینامیک این سیستم را با استفاده از معادله‌های لانژوین کوانتومی مورد بررسی قرار داده و به ویژه بر روی نوسان‌های کوانتومی سیستم با حل کردن دینامیک خطی شده در حالت ثابت کلاسیکی تمرکز می‌کنیم [۲]. سپس درهمتنیدگی دوتایی بین سه مد سامانه را در تقریب موج چرخان و مد بد کاواک (که در آن سیستم در حالت پایاتری قرار دارد) بدست می‌آوریم.

۲. هامیلتونی سیستم

این سامانه شامل کاواک اپتیکی فابری-پرو و کاواک ریزموج ابررساناست که این کاواک‌ها به وسیله یک تیغه متحرک یا نوسانگر مکانیکی به یکدیگر متصل شده‌اند. این تیغه متحرک باعث تغییر طول کاواک اپتیکی و تأثیر بر روی میدان فوتونی کاواک اپتیکی و تغییر فاصله صفحه‌های خازن مدار کاواک ریزموج و تأثیر بر روی میدان فوتونی ریزموج می‌شود. هامیلتونی سیستم جفت شده به صورت زیر می‌باشد [۳]:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_m^2 x^2}{2} + \frac{\phi^2}{2L} + \frac{Q^2}{2[C + C_o(x\omega)]} - e(t)Q + \hbar\omega_c a^+ a - \hbar G_{oc} a^+ a x + i\hbar E_c (a^+ e^{-i\omega_c t} - a e^{i\omega_c t}) \quad (1)$$

که در آن  $(x, p_x)$  به ترتیب نشان دهنده موقعیت کانونی و گشتاور یک نوسانگر مکانیکی با فرکانس  $\omega_m$  هستند. پارامترهای  $Q$  و  $\phi$  عبارتند از مختصات‌های کانونی کاواک ریزموج ابررسانا که شار را در یک القاگر معادل  $L$  و بار را در یک خازن معادل  $C$  توصیف می‌کنند. پارامترهای  $a$  و  $a^+$  عملگرهای نابودی و تولید مد کاواک اپتیکی،

هستند که در آنها  $\Delta_c = \Delta_{oc} - G_{oc}q_s$  و  $\Delta_\omega = \Delta_{0\omega} - G_{0\omega}q_s$  به ترتیب واکوکی مؤثر میدان کاواک اپتیکی و ریزموج می‌باشند. بخش‌های وابسته به زمان که دینامیک سیستم از حل آنها به دست می‌آید به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \delta \dot{q} &= \omega_m \delta p \\ \delta \ddot{p} &= -\omega_m \delta q - \gamma_m \delta p + G_{oc} \alpha_s (\delta a^+ + \delta a) \\ &+ G_{0\omega} \beta_s (\delta b^+ + \delta b) + \xi(t) \\ \delta \ddot{a} &= (k_c + i\Delta_c) \delta a + iG_{oc} \alpha_s \delta q + \sqrt{2k_c} a_{in}(t) \\ \delta \ddot{b} &= -(k_\omega + i\Delta_\omega) \delta b + iG_{0\omega} \beta_s \delta q + \sqrt{2k_\omega} b_{in}(t) \end{aligned} \quad (۳)$$

### ۳. نتایج در تقریب موج چرخان

معادله‌های وابسته به زمان سیستم را در تقریب موج چرخان و در حد  $\omega_m \gg G_\omega, G_c, k$  به دست می‌آوریم و از جمله‌هایی که با فرکانس  $\pm 2\omega_m$  نوسان می‌کنند چشم‌پوشی می‌کنیم. این حالت را به عنوان راه ندازی ضعیف در نظرمی‌گیریم. پارامترهای  $\delta \dot{q}, \delta \ddot{p}$  به صورت عملگر فنای مکانیکی  $\delta \dot{a}_m$  تبدیل شده‌اند:

$$\begin{aligned} \delta \ddot{a}_m &= -i\omega_m \delta a_m - \frac{\gamma_m}{2} (\delta a_m - \delta a_m^+) + i\frac{G_c}{2} (\delta a^+ + \delta a) \\ &+ i\frac{G_\omega}{2} (\delta b^+ + \delta b) + \frac{\xi(t)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (۴)$$

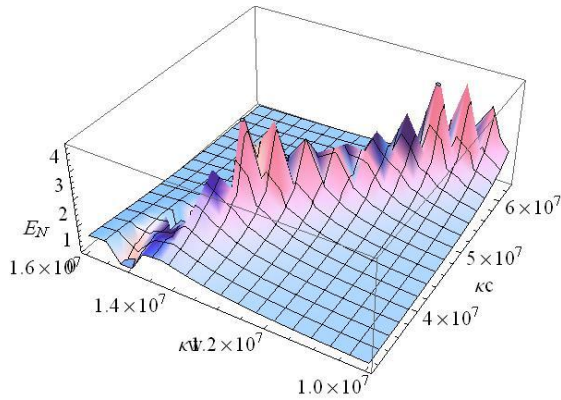
با توجه به این که در سیستم‌های دوتایی متصل به هم، درهمتنیدگی در صورتی رخ می‌دهد که یکی از سیستم‌ها در حالت واکوکی آبی و سیستم دوم در حالت واکوکی قرمز باشد [۵]، این شرط به این دلیل است که در سیستم با واکوکی آبی درهمتنیدگی بین نوسانگر مکانیکی و میدان کاواک رخ می‌دهد و در سیستم با واکوکی قرمز با حضور برهمکنش تقسیم پرتو رابطه دوگانه‌ای بین نوسانگر و میدان کاواک دوم وجود دارد و به واسطه نوسانگر مکانیکی بین دو میدان کاواکی اپتیکی و ریزموج درهمتنیدگی ایجاد می‌شود. بنابراین برای حالت‌های  $\Delta_c = -\omega_m < 0$  و  $\Delta_\omega = +\omega_m > 0$  داریم:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\tilde{a}}_m &= -\frac{\gamma_m}{2} \delta \tilde{a}_m + \frac{iG_c}{2} \delta \tilde{a}_c^+ + \frac{iG_\omega}{2} \delta \tilde{b} + \sqrt{\gamma_m} \tilde{a}_m^{in} \\ \delta \dot{\tilde{a}}_c &= -k_c \delta \tilde{a}_c + \frac{iG_c}{2} \delta \tilde{a}_m^+ + \sqrt{2k_c} \tilde{a}_{in} \\ \delta \dot{\tilde{b}} &= -k_\omega \delta \tilde{b} + \frac{iG_\omega}{2} \delta \tilde{a}_m + \sqrt{2k_\omega} \tilde{b}_{in} \end{aligned}$$

(۵) که در آن  $i\xi(t)e^{i\omega_m t}/\sqrt{2} = \sqrt{\gamma_m} \tilde{a}_m^{in}(t)$  و  $\tilde{a}_c^{in}(t) = a_c^{in}(t)e^{i\Delta_c t}$  و  $\tilde{b}^{in} = b^{in}(t)e^{i\Delta_\omega t}$  است [۶]. اگر  $\Delta_\omega > 0$  باشد برهمکنش بین نوسانگر مکانیکی و میدان اپتیکی از جنس  $a_m^+ b^+ + a_m^+ b$  و اگر  $\Delta_c < 0$  باشد برهمکنش بین میدان اپتیکی و میدان ریزموج از جنس  $a_c^+ a_m^+ + a_c a_m$  خواهد بود. در این سیستم سه مدی، مدهای کاواک اپتیکی و ریزموج می‌توانند با واسطه نوسانگر مکانیکی درهمتنیده شوند. چون جمله‌های نویز در سه بخش معادله ۵ توابع گاوسی با متوسط صفر هستند و دینامیک سیستم خطی سازی شده است. حالت ایستای سیستم حالت گاوسی سه مدی است که با ماتریس همبستگی  $6 \times 6$  متقارن مشخص می‌شود. معادله‌های دینامیک سیستم را می‌توان به معادله اول لیاپونوف تبدیل کرد و از آنجا ماتریس همبستگی سیستم را محاسبه کرد. با استفاده از این ماتریس می‌توانیم درهمتنیدگی دوگانه حالت ایستا را به ترتیب بین سه مد اپتیکی، ریزموج و نوسانگر به دست آوریم. درهمتنیدگی مدها با استفاده از عبارت منفی لگاریتمی  $E_N$  به دست می‌آید [۶].

شکل ۲ درهمتنیدگی بین مدهای مکانیکی و کاواک اپتیکی را بر حسب دما نشان می‌دهد. درهمتنیدگی یا منفی لگاریتمی  $E_N^{mc}$  از مقدار بزرگ 2.5 به مقدار صفر در دمای  $0.6k$  به سرعت کاهش می‌یابد. منفی لگاریتمی در شرایط  $\Delta_c = -\omega_m$  و  $\Delta_\omega = +\omega_m$  در نظر گرفته شده است. ما برای رسم شکل پارامترهایی را برای نوسانگر مکانیکی و کاواک اپتیکی و کاواک ریزموج در نظر گرفته-ایم، یعنی نوسانگر مکانیکی را با فرکانس  $\omega_m = 2\pi \times 10^7 \text{ Hz}$  و کاواک ریزموج را با فرکانس  $\omega_\omega = 2\pi \times 10^{10} \text{ Hz}$  و آهنگ میرایی  $k_\omega = 0.02\omega_m$  در نظر می‌گیریم که توسط یک منبع ریزموج با توان  $p_\omega = 30 \times 10^{-3} \text{ W}$  راه‌اندازی می‌شوند. جفت‌شدگی بین این دو توسط پارامترهای  $d = 100 \text{ nm}$  و  $\mu = 0.008$  تعیین می‌گردد. جرم نوسانگر مکانیکی  $m = 10 \text{ ng}$  است. کاواک اپتیکی را با طول  $L = 1 \times 10^{-3} \text{ m}$  و آهنگ میرایی  $k_c = 0.08\omega_m$  در نظر می‌گیریم که توسط یک لیزر با طول موج  $\lambda = 810 \text{ nm}$  و توان  $p_c = 30 \times 10^{-3} \text{ W}$  راه-اندازی می‌شود. واکوکی کاواک اپتیکی در  $\Delta_c = -\omega_m$

تثبیت شده است و ضریب میرایی نوسانگر مکانیکی  $\gamma_m = 4\pi \times 10^2$  می باشد.



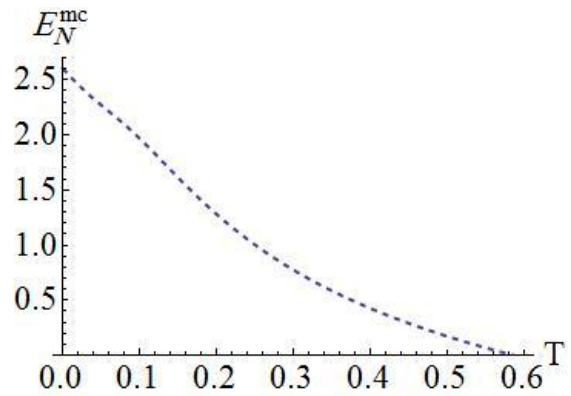
شکل ۴: دره‌متنیدگی میدان کاواک اپتیکی و میدان کاواک ریزموج بر حسب ضریب اتلاف کاواک اپتیکی و ضریب اتلاف کاواک ریزموج در دمای  $T=150mk$  و  $\mu = 0.008$ .

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این سامانه با استفاده از پارامترهای قابل دستیابی به لحاظ تجربی در حالت پایا و در تقریب RWA، دره‌متنیدگی متغیرهای پیوسته دو بخشی بین مدهای اپتیکی-نوسانگر و مدهای اپتیکی-ریزموج به دست آمد. به ویژه نوسانگر مکانیکی قادر به انتقال دره‌متنیدگی ثابت بین مدهای کاواک اپتیکی و ریزموج است و این ویژگی را تا دمای  $6.8K$  حفظ می کند. از این ویژگی سامانه می توان برای ایجاد دره‌متنیدگی بین دو کاواک دور از هم و انتقال دره‌متنیدگی به بخش کیوبیت حالت جامد استفاده کرد.

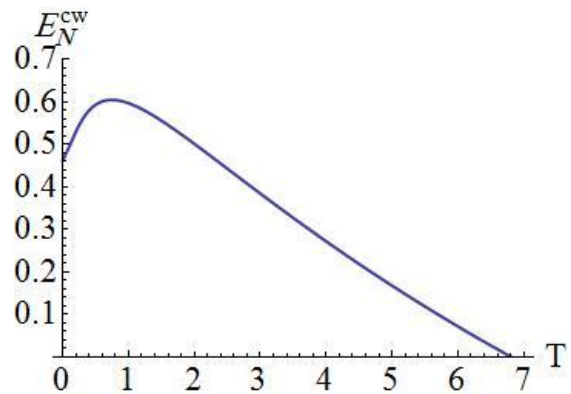
#### مراجع

- [1] Aspelmeyer M, Kippenberg T J, Marquardt F, arxiv: 1303.0733 (2013).
- [2] Schwab K C and Roukes M L, Phys. Today 58, 36 (2005).
- [3] Vitali D., Tombesi P., Woolley M J, Doherty A C, and Milburn G J, Phys. Rev. A 76, 042336. (2007)
- [4] Barzanjeh S, Vitali D, Tombesi P, Milburn G J, Phys. Rev. A, 84, 042342. (2011).
- [5] Genes c, Mari A, Vitali D and Tombesi P, Adv.At. Mol. Opt. Phys. 57, 33 (2009).
- [6] Gardiner C W and Zoller P, Quantum Noise,(springer, Berlin,2000).



شکل ۲: دره‌متنیدگی بین میدان کاواک اپتیکی و نوسانگر مکانیکی بر حسب دما.

شکل ۳ نشان دهنده دره‌متنیدگی بین میدان کاواک اپتیکی و میدان کاواک ریزموج است. علی رغم اینکه در برهمکنش بین  $a_m$  و  $b$  دره‌متنیدگی وجود ندارد، ولی چون برهمکنش بین  $a_m$  و  $a_c$  منجر به دره‌متنیدگی می-شود در نتیجه  $a_c$  و  $b$  بواسطه  $a_m$  با یکدیگر دره‌متنیده می‌شوند. چون برهمکنش کوانتومی بین مد کاواک اپتیکی و مد کاواک ریزموج به صورت واسطه‌ای رخ داده و مستقیم نیست، میزان دره‌متنیدگی از مقدار  $E_N^{mc}$  کمتر است اما تا دماهای بالاتر، نزدیک به  $7k$  نیز دره‌متنیدگی بین آنها وجود دارد.



شکل ۲: دره‌متنیدگی بین میدان کاواک اپتیکی (c) و میدان کاواک ریزموج (w) بر حسب دما.

در شکل ۴ دره‌متنیدگی بین میدان‌های اپتیکی و میدان ریزموج بر حسب مقادیر میرایی  $k_w$  و  $k_c$  رسم شده است. مکان‌هایی که منفی لگاریتمی  $E_N^{a_c b}$  بیشینه می‌شود، مناطقی است که در آنها  $k_w \approx k_c$  می باشد که مقداری به سمت مقادیر کم  $k_w$  منحرف شده است.