بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

محاسبه‌ی دامنه‌ی احتمال‌های گذار دو نوسانگر هماهنگ بدون برهمکنش که از طریق یک حمام گرمایی مشترک برهمکنش می‌کنند.

آرزو محمودصالحی، نوشین سعادت‌نیا، فردین خیراندیش

اصفهان، خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، گروه فیزیک

چکیده – در این مقاله دینامیک اتلافی دو نوسانگر کوانتومی غیر برهمکنشی که با یک حمام گرمائی مشترک برهمکنش می‌کنند، با معرفی یک لاگرانژی جدید مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات کوانتومی لانژون برای نوسانگرها به دست آمده و حالت‌های مختلف اتلاف بررسی شده است. احتمال‌های گذار بین ترازهای انرژی یک نوسانگر تا مرتبه‌ی دوم اختلال وابسته به زمان محاسبه شده و نحوه‌ی برهمکنش دو نوسانگر از طریق حمام گرمائی مشترک مورد بررسی قرار گرفته است.

کلید واژه- احتمال‌های گذار، پذیرفتاری، معادله‌ی لانژون، نوفه.

The calculation of transient probability amplitudes for two non-interacting oscillators interacting via a common heat bath

Arezoo Mahmoudsalehi, Nooshin Saadatnia, Fardin Kheirandish

Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan

Abstract- In this paper the quantum dynamics of two non-interacting quantum oscillator interacting with a common heat-bath is investigated by introducing a new Lagrangian. The quantum Langevin equation for each oscillator is obtained and different dissipative cases are discussed. The transient probability amplitudes among energy levels for one oscillator are obtained up to the second order time-dependent perturbation theory and the way that the oscillators are interacting due to the common bath is discussed.

Keywords: Transient probabilities, Susceptibility, Langevin equation, Noise.

۱-مقدمه

می‌توان نشان داد برای بررسی حرکت براونی کوانتومی دو ذره برهمکنش‌کننده در یک محیط مشترک، اگر چنان‌چه بخواهیم شکل تابع جفت‌شدگی را ثابت نگه داریم، الزاماً مجبوریم از دو حمام گرمایی مستقل از هم استفاده کنیم. یک راه دیگر این است که از یک حمام گرمایی استفاده کنیم، اما توابع کوپلاژ را برای درجات آزادی مرکز جرم و مختصات نسبی ذرات متفاوت در نظر بگیریم. دلیل این امر آن است که درست است که محیط را همگن درنظر می‌گیریم اما این به آن معنی نیست که برآیند نیروهای کاتوره‌ای که در دو نقطه‌ی مختلف بر ذرات وارد می‌شود، یکسان است. بنابراین در این مقاله ما سعی می‌کنیم با ثابت نگه داشتن مدل حمام گرمایی و در نظر گرفتن توابع جفت‌شدگی متفاوت، مدلی برای حرکت براونی ذرات برهمکنش کننده ارائه نماییم.

۲- لاگرانژی

لاگرانژی سامانه‌ای متشکل از دو نوسانگر بدون برهم‌کنش و یک حمام گرمایی مشترک که با هر کدام از نوسانگرها برهم‌کنش دارد را این چنین تعریف می‌کنیم[۱،۲،۳] ،

$$L = L_S + L_B + L_{\text{int}} \tag{۱}$$

در این رابطه L_S ، L_B و L_{int} به ترتیب بیان‌گر لاگرانژی دو نوسانگر، حمام گرمایی و برهمکنش بین نوسانگرها و حمام هستند. برای سادگی فرض می‌کنیم نوسانگرها دارای بسامد و جرم یکسان ω و m هستند. هم‌چنین حمام گرمایی را به صورت پیوستاری از نوسانگرهای هماهنگ مستقل خطی مدل‌سازی می‌کنیم[۴]. برای L_S و L_B داریم:

$$L_S = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2} m\omega^2 \left(x_1^2 + x_2^2\right) \tag{۲}$$

$$L_B = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu \left(\dot{Y}_\nu^2 - \nu^2 Y_\nu^2\right) \tag{۳}$$

در چارچوب مرکز جرم $x = x_1 + x_2/2$ ، $z = x_1 - x_2$ ، $M = 2m$ و $\mu = m/2$ را تعریف می‌کنیم و لاگرانژی برهمکنش را به صورت خطی و به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$L_{\text{int}} = \int_0^\infty d\nu f_x(\nu)\dot{x} Y_\nu + \int_0^\infty d\nu f_z(\nu)\dot{z} Y_\nu \tag{۴}$$

در این رابطه $f_i(\nu)$ تابع جفت‌شدگی با مختصه‌ی x و z است. در این حالت رابطه‌ی (۱) به صورت

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{z}^2 - \frac{1}{2}\mu\omega^2 z^2 \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu\left(\dot{Y}_\nu^2 - \nu^2 Y_\nu^2\right) + \int_0^\infty d\nu f_x(\nu)\dot{x} Y_\nu \\ &+ \int_0^\infty d\nu f_z(\nu)\dot{z} Y_\nu \end{aligned} \tag{۵}$$

می‌شود. با استفاده از معادلات حرکت هایزنبرگ داریم:

$$\ddot{Y}_\nu + \nu^2 Y_\nu = f_x(\nu)\dot{x} + f_z(\nu)\dot{z} \tag{۶}$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = -\frac{1}{\mu}\int_0^\infty d\nu f_z(\nu)\dot{Y}_\nu \tag{۷}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{1}{M}\int_0^\infty d\nu f_x(\nu)\dot{Y}_\nu \tag{۸}$$

جواب معادله‌ی (۶) با استفاده از تابع گرین به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} Y_\nu(t) &= Y_\nu^N(t) \\ &+ \int_0^t dt' G_\nu(t-t')\left[f_x(\nu)\dot{x}(t') + f_z(\nu)\dot{z}(t')\right] \end{aligned} \tag{۹}$$

در این رابطه $Y_\nu^N(t)$ جواب همگن معادله‌ی (۶) و جمله‌ی دوم جواب ناهمگن آن است که نوفه‌ی محیط را نشان می‌دهد،

$$Y_\nu^N(t) = Y_\nu^N(0)\cos(\nu t) + P_\nu^N(0)\frac{\sin(\nu t)}{\nu} \tag{۱۰}$$

$$G_\nu(t-t') = \frac{\sin\left[\nu(t-t')\right]}{\nu}, \quad t > t' \tag{۱۱}$$

با داشتن $Y_\nu(t)$ می‌توان معادلات (۷) و (۸) را نوشت:

$$\begin{aligned} &\ddot{z}(t) + \omega^2 z(t) + \frac{1}{\mu}\frac{d}{dt}\int_0^t dt'\gamma_{zz}(t-t')\dot{z}(t') \\ &+ \frac{1}{\mu}\frac{d}{dt}\int_0^t dt'\gamma_{zx}(t-t')\dot{x}(t') = \frac{1}{\mu}\xi_z(t) \end{aligned} \tag{۱۲}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) + \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\int_0^t dt'\gamma_{xx}(t-t')\dot{x}(t') \\ &+ \frac{1}{M}\frac{d}{dt}\int_0^t dt'\gamma_{zx}(t-t')\dot{z}(t') = \frac{1}{M}\xi_x(t) \end{aligned} \tag{۱۳}$$

که در معادلات لانژون فوق، ξ_i و γ_{ij} بدین گونه تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} &\xi_i = -\int_0^\infty d\nu f_z(\nu)\dot{Y}_\nu^N(t), \quad i = x, z \\ &\gamma_{ij}(t-t') = \int_0^\infty d\nu f_i(\nu) f_j(\nu) G_\nu(t-t'), i, j = x, z \end{aligned} \tag{۱۴}$$

لازم به ذکر است که γ_{ij} پذیرفتاری محیط و ξ_i تابع نوفه را نشان می‌دهد. در نهایت با استفاده از تبدیل لاپلاس روابط

(۱۲) و (۱۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[s^2+\omega^2+\frac{s^2}{\mu}\gamma_{zz}(s)\right]z(s)+\left[\frac{s^2}{\mu}\gamma_{zx}(s)\right]x(s)=\left[s+\frac{s}{\mu}\gamma_{zz}(s)\right]z(0)+\dot{z}(0)+\frac{s}{\mu}\gamma_{zx}(s)\,x(0)+\frac{1}{\mu}\xi_z(s) \qquad (۱۵)$$

$$\left[s^2+\omega^2+\frac{s^2}{M}\gamma_{xx}(s)\right]x(s)+\left[\frac{s^2}{M}\gamma_{zx}(s)\right]z(s)=\left[s+\frac{s}{M}\gamma_{xx}(s)\right]x(0)+\dot{x}(0)+\frac{s}{M}\gamma_{zx}(s)z(0)+\frac{1}{M}\xi_x(s) \qquad (۱۶)$$

در ادامه برای مورد خاص $\gamma_{zz}(s)=\alpha/s$، $\gamma_{xx}(s)=\beta/s$ و $\gamma_{zx}(s)=\gamma/s$ که α، β و γ ثابت هستند و $\alpha\gg\beta,\gamma$ است، یا به عبارتی $f_z(\nu)\gg f_x(\nu)$ ، داریم:

(۱۷)

$$z(t)=e^{-\frac{\alpha}{2\mu}t}\left[\frac{\alpha\sin(\Omega_\alpha t)}{2\mu\Omega_\alpha}+\cos(\Omega_\alpha t)\right]z(0)+e^{-\frac{\alpha}{2\mu}t}\frac{\sin(\Omega_\alpha t)}{\Omega_\alpha}\dot{z}(0)+\frac{\gamma}{\mu}e^{-\frac{\alpha}{2\mu}t}\frac{\sin(\Omega_\alpha t)}{\Omega_\alpha}x(0)-\frac{1}{\mu}\int_0^\infty d\nu f_z(\nu)\int_0^t dt' e^{-\frac{\alpha}{2\mu}t}\frac{\sin(\Omega_\alpha t)}{\Omega_\alpha}\dot{Y}_\nu^N(t-t')$$

که در این رابطه $\Omega_\alpha\equiv\sqrt{\omega^2-(\alpha/2\mu)^2}$. در حد زمان‌های به حد کافی بزرگ یعنی $t\gg 2/\beta$ این رابطه به صورت

(۱۸)

$$z(t)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty d\nu f_z(\nu)\left\{\nu Y_\nu^N(0)\left(\frac{\left(\omega^2-\nu^2\right)\sin(\nu t)}{\left(\omega^2-\nu^2\right)^2+\left(\frac{\alpha\nu}{\mu}\right)^2}-\frac{\frac{\alpha\nu}{\mu}\cos(\nu t)}{\left(\omega^2-\nu^2\right)^2+\left(\frac{\alpha\nu}{\mu}\right)^2}\right)-P_\nu^N(0)\left(\frac{\left(\omega^2-\nu^2\right)\cos(\nu t)}{\left(\omega^2-\nu^2\right)^2+\left(\frac{\alpha\nu}{\mu}\right)^2}+\frac{\frac{\alpha\nu}{\mu}\sin(\nu t)}{\left(\omega^2-\nu^2\right)^2+\left(\frac{\alpha\nu}{\mu}\right)^2}\right)\right\}$$

تبدیل شده و در نتیجه $x(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x(t)=\cos(\omega t)x(0)+\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\dot{x}(0)+\frac{1}{M}\int_0^\infty d\nu f_x(\nu)\left\{\begin{array}{l}\nu Y_\nu^N(0)\dfrac{\sin(\nu t)-\frac{\nu}{\omega}\sin(\omega t)}{\omega^2-\nu^2}\\+P_\nu^N(0)\dfrac{\cos(\omega t)-\cos(\nu t)}{\omega^2-\nu^2}\end{array}\right\} \qquad (۱۹)$$

با ترکیب روابط (۱۸) و (۱۹) می‌توان $x_1(t)$ را تعیین کرد:

(۲۰)

$$x_1(t)=\frac{1}{2}\cos(\omega t)\left[x_1(0)+x_2(0)\right]+\frac{1}{2}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\left[\dot{x}_1(0)+\dot{x}_2(0)\right]+\frac{1}{2\mu}\int_0^\infty d\nu f_z(\nu)\left\{\nu Y_\nu^N(0)\left(\frac{\left(\omega^2-\nu^2\right)\sin(\nu t)}{\left(\omega^2-\nu^2\right)^2+\left(\frac{\alpha\nu}{\mu}\right)^2}-\frac{\frac{\alpha\nu}{\mu}\cos(\nu t)}{\left(\omega^2-\nu^2\right)^2+\left(\frac{\alpha\nu}{\mu}\right)^2}\right)-P_\nu^N(0)\left(\frac{\left(\omega^2-\nu^2\right)\cos(\nu t)}{\left(\omega^2-\nu^2\right)^2+\left(\frac{\alpha\nu}{\mu}\right)^2}+\frac{\frac{\alpha\nu}{\mu}\sin(\nu t)}{\left(\omega^2-\nu^2\right)^2+\left(\frac{\alpha\nu}{\mu}\right)^2}\right)\right\}$$

به طریق مشابه $x_2(t)$ نیز به دست می‌آید. واضح است که مختصات نوسانگر اول به نوسانگر دوم وابسته است و بالعکس، اگر چه از ابتدا هیچ برهم‌کنشی بین آن‌ها وجود نداشت. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که به واسطه‌ی برهم‌کنش با یک حمام گرمایی مشترک، یک ارتباط بین آن‌ها به وجود آمده است. برای دست‌یابی به نتایج دقیق‌تر می‌توان تقریب را بهتر کرد، به این منظور کافیست تنها از ضریب $\gamma_{zx}(s)$ در رابطه‌ی (۱۵) صرف‌نظر کرد.

۳-هامیلتونی

در این بخش ارتباط بین دو نوسانگر را به روش هامیلتونی نشان می‌دهیم. برای این منظور در دستگاه غیر مرکزجرم داریم:

(۲۱)

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2(t)+\dot{x}_2^2(t)\right)-\frac{1}{2}m\omega^2\left(x_1^2(t)+x_2^2(t)\right)+\frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu\left[\dot{Y}_\nu^2-\nu^2Y_\nu^2\right]+\int_0^\infty d\nu f_1(\nu)Y_\nu(t)\dot{x}_1(t)+\int_0^\infty d\nu f_2(\nu)Y_\nu(t)\dot{x}_2(t)$$

که در این رابطه $f_1(\nu)=1/2[f_x(\nu)+f_z(\nu)]$ و $f_2(\nu)=1/2[f_x(\nu)-f_z(\nu)]$. با استفاده از تعریف هامیلتونی، $H=\sum_i P_i\dot{x}_i-L$، که x و p به ترتیب مختصات و تکانه‌ی کانونیک هستند:

$$p_1=m\dot{x}_1+d_1,\ p_2=m\dot{x}_2+d_2,\ P_\nu=\dot{Y}_\nu(t) \qquad (۲۲)$$

و d_ν نیز به صورت $d_i=\int_0^\infty d\nu f_i(\nu)Y_\nu$ تعریف شده است، هامیلتونی سامانه‌ی کلی را می‌توان به صورت $H=H_0+H'$ نوشت که H_0 و H' به ترتیب هامیلتونی آزاد و برهم‌کنشی را نشان می‌دهند،

$$H_0=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\left(x_1^2+x_2^2\right)+\frac{1}{2}\int_0^\infty d\nu\left[P_\nu^2+\nu^2Y_\nu^2\right] \qquad (۲۳)$$

$$H'=\frac{p_1d_1}{m}+\frac{p_2d_2}{m} \qquad (۲۴)$$

به منظور حذف فرآیندهای دو فوتونی جمله‌ی $\frac{d^2}{2m}$ صرف‌نظر شده است. در ادامه هامیلتونی را بر اساس عملگرهای خلق و نابودی $(k=1,2)$ $\hat{a}_k^\dagger$ و $\hat{a}_k$ مربوط به دو نوسانگر و $a_\nu^\dagger$ و a_ν مربوط به نوسانگرهای حمام گرمایی بازنویسی می‌کنیم. عملگرهای فوق روابط جابه‌جایی استاندارد $[\hat{a}_i,\hat{a}_j^\dagger]=\delta_{ij}$ و $[\hat{a}_\nu,\hat{a}_{\nu'}^\dagger]=\delta(\nu-\nu')$ را برآورده می‌کنند. هامیلتونی H_0 و H' برحسب عملگرهای خلق و نابودی و با حذف مقادیر ثابت، با توجه به این‌که در دینامیک سامانه بی تأثیر هستند، به صورت

$$H_0=H_{OSC}+H_B=\hbar\omega\sum_{k=1}^{2}\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k+\hbar\int_0^\infty d\nu\,\nu\hat{a}_\nu^\dagger\hat{a}_\nu \qquad (۲۵)$$

$$H'(t)=i\sum_{k=1}^{2}\left(\hat{a}_k^\dagger-\hat{a}_k\right)\int_0^\infty d\nu g_\nu\left(\hat{a}_\nu^\dagger+\hat{a}_\nu\right) \qquad (۲۶)$$

می‌شوند که g_ν به صورت $g_\nu=(\hbar/2)\sqrt{\omega/m\nu}\ f(\nu)$ تعریف شده است. در تصویر برهمکنش با در نظر گرفتن حالت سامانه به صورت $|\psi\rangle=|\varphi\rangle_1\otimes|\varphi\rangle_2\otimes|\varphi\rangle_B$، دامنه‌ی گذار از حالت اولیه‌ی $|\psi\rangle_i$ به حالت نهایی $|\psi\rangle_f$ که

(۲۷)

$$|\psi\rangle_i=|n\rangle_1\otimes|0\rangle_2\otimes|0\rangle_B,\ |\psi\rangle_f=|n-1\rangle_1\otimes|1\rangle_2\otimes|0\rangle_B$$

را به دست می‌آوریم:

$$\langle\psi_f|U_{\mathrm{int}}|\psi_i\rangle=2\sqrt{n}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2\int_0^t dt_1\int_0^{t_1}dt_2\int_0^\infty d\nu\left[g_\nu^2\cos\left[\omega(t_1-t_2)\right]e^{-i\nu(t_1-t_2)}\right] \qquad (۲۸)$$

که در آن عملگر تحول زمانی تا مرتبه‌ی دوم اختلال محاسبه شده است و نشان دهنده‌ی یک ارتباط میان دو نوسانگر است. در این رابطه نرخ احتمال گذار مطابق قاعده‌ی طلایی فرمی متناسب با تعداد کوانتاهای n شده است. با توجه به رابطه‌ی $\gamma_{zz}(s)=\alpha/s$ و رابطه‌ی تابع جفت‌شدگی با بخش موهومی تابع پذیرفتاری، می‌توان نشان داد

$$g_\nu^2=\frac{\hbar^2\omega\alpha}{2\pi m\nu} \qquad (۲۹)$$

و بنابراین رابطه‌ای صریح برای محاسبه‌ی دامنه‌ی احتمال گذار (۲۸) به دست می‌آید.

۳-نتیجه‌گیری

در این مقاله به دو طریق نشان دادیم دو نوسانگر مستقل که در برهمکنش با یک حمام گرمایی مشترک هستند، با یکدیگر وارد برهمکنش می‌شوند. در روش اول با حل معادلات لانژون و محاسبه‌ی مکان نوسانگرها و در روش دوم با محاسبه‌ی دامنه‌ی احتمال گذار بین حالت‌های دو نوسانگر این ارتباط روشن شد.

۴-مراجع

[۱] Weiss, U.: *Quantum Dissipative Systems*. World Scienti_c Publishing, Singapore (۲۰۰۸)

[۲] Caldeira, A.O., Leggett, A.J.: Ann. Phys. **۱۴۹**, ۳۷۴ (۱۹۸۳)

[۳] Leggett, A.J., et al.: Rev. Mod. Phys. **۵۹**, ۱ (۱۹۸۷)

[۴] Kheirandish F. and Amooghorban E.: Int. J. Theor. Phys. **۵۳**, ۲۵۹۳ (۲۰۱۴)