بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

تابش چرنکوف در محیط پاشنده‌ی اتلافی و تقویت کننده

سمیرا سادات نوری‌زاده[۱،*] مرتضی سلطانی[۲]

اصفهان خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، گروه فیزیک

چکیده – وقتی ذره‌ای با سرعت ثابت بیش از سرعت فاز نور در محیط حرکت کند ،تابش مخروطی شکل موسوم به تابش چرنکوف به‌وجود می‌آید. در این مقاله محیط را پاشنده در نظر می‌گیریم و به شکل کوانتومی توان تابشی را در این محیط محاسبه می‌کنیم. نشان خواهیم داد اتلافی بودن یا تقویت کننده بودن محیط چطور می‌تواند روی تابش چرنکوف اثر بگذارد. در آخر نشان خواهیم داد که اگر محیط را تقویت کننده در نظر بگیریم به جای این‌که تابش داشته باشیم، الکترون تابش را جذب می‌کند .

کلید واژه– تابش چرنکوف، محیط پاشنده‌ی اتلافی، محیط تقویت کننده.

Cherenkov radiation in presence of dissipative and amplifying media

Samira Sadat Nourizadeh, Morteza Soltani

Esfahan, Hezar Jerib Av., Esfahan University, Physics Department

We have the Cherenkov radiation when a particle moves with a velocity faster than the phase velocity in the medium which is appeared as a Cherenkov cone. In this work we consider the quantum Cherenkov radiation in a dissipative media and we will calculate the effect of lost and gain on Cherenkov radiation numerically. We will show that the lost decrees the Cherenkov radiation and also gain can inverse radiation.

Keywords: Cherenkov radiation, dissipative media, gain

۱- مقدمه

وقتی ذره بارداری درون محیط مادی با سرعت ثابت بیش از سرعت فاز نور در محیط حرکت کند نوری ساطع می‌شود که مخروطی شکل است . تابش اولین بار توسط چرنکوف مشاهده شده است[1] و محاسبات نظری آن اولین بار توسط تام و فرانک انجام شد. آن‌ها با استفاده ازحل معادلات الکترودینامیک در محیط، شدت تابش بر واحد زمان را با استفاده از شار بردار پوینتیگ روی سطح استوانه‌ای که مسیر الکترون را احاطه کرده بود به دست آوردند. وقتی ذره باردار درون محیط حرکت می‌کند چگالی جریانی به وجود می‌آید که منجر به تولید میدان الکترومغناطیسی می‌شود. در این مقاله با استفاده از رهیافت کوانتش میدان و معرفی عملگرهای کوانتومی، پتانسیل برداری را به شکل کوانتومی به‌دست آورده و با استفاده از قاعده طلایی فرمی، شدت تابشی را محاسبه می‌کنیم [2]، سپس با تعمیم این مدل به محیطی پاشنده و با استفاده از مدل نوسانگر لورنتس نشان می‌دهیم که در حالت‌های مختلف میزان شدت تابشی چطور به ضریب میرایی محیط وابسته است، البته باید به این نکته توجه کرد که در صورت جاذب بودن محیط تابش چرنکوف توسط محیط جذب می‌شود، به عبارتی ابتدا به علت تابش چرنکوف انرژی مکانیکی الکترون به تابش الکترومغناطیسی تبدیل می‌شود، سپس نور منتشر شده توسط محیط پاشنده جذب می‌شود. در این مدل محیط را هم به شکل جاذب و هم به شکل تقویت کننده بررسی می‌کنیم ونشان می‌دهیم در صورتی که محیط جاذب باشد تابش چرنکوف ضعیف می‌شود و در صورتی که محیط را تقویت کننده در نظر بگیریم تابش چرنکوف معکوس می‌شود به شکلی که باعث شتاب‌دار شدن ذره باردار می‌شود .

۲- تابش چرنکوف

ذره‌ی باردار به جرم m و بار الکتریکی e در محیط خطی و همگن با سرعت ثابت در حال حرکت است و چگالی جریان خارجی به وجود می‌آورد که منجر به ایجاد میدان الکترومغناطیسی می‌شود. با استفاده از رهیافت هاتنر و بارنت و با توجه به شرایط محیط لاگرانژی زیر را تعریف می‌کنیم[3].

$$\underline{L}=\sum_{\lambda=1}^{3}\int_0^\infty d\omega\int' d^3k\left(\left|\dot{\underline{X}}_{\omega\lambda}\right|^2-\omega^2\left|\underline{X}_{\omega\lambda}\right|^2+\left|\dot{\underline{Y}}_{\omega\lambda}\right|^2-\omega^2\left|\underline{Y}_{\omega\lambda}\right|^2\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{r}_\alpha^2(t)+\sum_{\lambda=1}^{2}\int' d^3k\left(\varepsilon_\circ\left|\dot{\underline{A}}_\lambda\right|^2-\frac{\left|k\,\underline{A}_\lambda\right|^2}{\mu_\circ}\right)$$
$$+\int' d^3k\left(\underline{A}_\lambda\underline{J}_\lambda^{*\perp}(k,t)+h.c.\right)$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{2}\int' d^3k\,[(-\dot{\underline{A}}_\lambda\underline{P}_\lambda^{*\perp}(k,t)$$
$$+\left(ik\times\left(\underline{A}_\lambda\hat{e}_\lambda(k)\right).\underline{M}^*(k,t)\right))+h.c]$$
$$+\int' d^3k\left(\frac{(ik.\underline{P})\underline{\rho}^*}{\varepsilon_0|k|^2}+h.c.\right)-\int' d^3k\,\frac{|\underline{\rho}|^2}{\varepsilon_0|k|^2}\qquad(۱)$$
$$-\int' d^3k\left(\frac{\left|(ik.\underline{P})\right|^2}{\varepsilon_0|k|^2}\right)$$

با استفاده از لاگرانژی (۱) هامیلتونی را محاسبه می‌کنیم. با رهیافت کوانتش کانونیک میدان الکترومغناطیسی، متغییر های دینامیکی را بر اساس عملگرهای کوانتومی تعریف می‌کنیم و هامیلتونی را بر حسب عملگرهای کوانتومی می‌نویسیم. هامیلتونی سامانه کل شامل دو بخش است، یک بخش برهم‌کنشی میدان الکترومغناطیسی و میدان‌های محیط و یک بخش غیر برهم‌کنشی الکترون آزاد است،که به این شکل تعریف می‌شود .

$$H=H_0+H_{\text{int}}\qquad(۲)$$

$$H_0=H_{ele}+H_F\qquad(۳)$$

$$H_{ele}=\frac{P^2}{2m}\qquad(۴)$$

$$H_F=\sum_{\lambda=1}^{3}\int d\omega\int d^3k\,\hbar\omega\{d_\lambda^\dagger(k,\omega,t)\,d_\lambda(k,\omega,t)$$
$$+b_\lambda^\dagger(k,\omega,t)\,b_\lambda(k,\omega,t)\}\qquad(۵)$$

$$H_{\text{int}}=\frac{-ep.A}{m}\qquad(۶)$$

که در اینجا عملگرهای b و d برای کوانتش قطبش و مغناطش بیان شده است. حال الکترون متحرک را که دارای تکانه خطی $\hbar q$ است را در نظرمی‌گیریم.

$$p|q\rangle=\hbar q|q\rangle\qquad(۷)$$

$$\langle x|q\rangle=\psi_q(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}e^{iq.x}\qquad(۸)$$

که $|q\rangle$ویژه بردار تکانه الکترون با ویژه مقدار $\hbar q$ است.به عبارتی qعدد موج الکترون می‌باشد. از طرفی هامیلتونی مختل نشده $H_0=H_{ele}+H_F$دارای ویژه حالت $|ele+rad\rangle=|ele\rangle|rad\rangle$ می‌باشد که حاصل‌ضرب مستقیم ویژه حالت‌های هامیلتونی‌های H_{ele}و H_Fهستند . با بکار بردن نظریه اختلال مکانیکی کوانتومی با تقریب مرتبه اول، احتمال گذار بر واحد زمان برای الکترون آزاد با تکانه $\hbar q$ که به واسطه گسیل فتونی با تکانه $\hbar k$ و

انرژی $\hbar\omega$ به تکانه جدید $\hbar(q-k)$ تغییر می‌کند مطابق با قاعده طلایی فرمی برابر است با :

$$\Gamma_{q\to q-k} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle 1_k|\langle q-k|H_{\text{int}}|q\rangle|0\rangle\right|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 q^2}{2m}-\frac{\hbar^2|q-k|^2}{2m}-\hbar\omega\right)$$

(۹)

در اینجا $|0\rangle$ نشان دهنده‌ی حالت خلأ و $\langle 1_k|$ نشان دهنده حالت برانگیخته با یک فتون با بردار موج k و فرکانس ω است. در اینجا شناسه‌ی تابع دلتای دیراک نشان دهنده پایستگی انرژی است. با داشتن H_{int} در رابطه‌ی (۶) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم :

$$\Gamma_{q\to q-k} = \frac{e^2 v^2\left(1-\cos^2\theta\right)}{4\pi^3\varepsilon_0\hbar}\,\text{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2\varepsilon(\omega)+k^2c^2\mu^{-1}(\omega)}\right)\delta\left(k v-\omega\left(1+\frac{\hbar k^2}{2m\omega}\right)\right)$$

(۱۰)

در این حالت شدت تابش بر واحد زمان با استفاده از رابطه‌ی(۱۰) به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{e^2 v}{2\pi^2\varepsilon_0}\sum_{\lambda=1}^{2}\int d^3k\int_0^{+\infty} d\omega\,\hbar\omega\,\Gamma_{q\to q-k}$$

$$= \frac{e^2 v}{2\pi^2\varepsilon_0}\int_0^{\infty} k\,dk\int_0^{\infty}\omega\,d\omega\left[1-\frac{\omega^2}{k^2v^2}\left(1+\frac{\hbar k^2}{2m\omega}\right)^2\right]\text{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2\varepsilon(\omega)+k^2c^2\mu^{-1}(\omega)}\right)$$

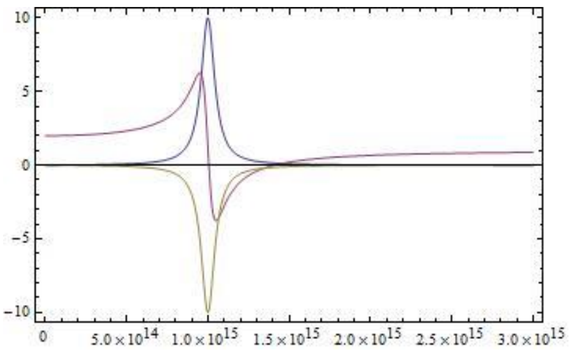
(۱۱)

در اینجا با توجه به آرگومان تابع دلتا استنباط می‌شود که دیگر رابطه- k و ω رابطه‌ایی خطی نیست.

$$\cos\theta-\frac{\omega}{kv}\left(1+\frac{\hbar k^2}{2m\omega}\right)=0$$ (۱۲)

انتگرال روی k و ω به یکدیگر مربوط هستند یعنی انتگرال روی صفحه $k\,\omega$ باید در فضایی بین یک سهمی و محور k در نظر گرفته شود. اکنون محیط را پاشنده در نظر می‌گیریم و با توجه به مدل نوسانگر لورنتس $\varepsilon(\omega)$ را به شکل کلی تعریف می‌کنیم :

$$\varepsilon(\omega)=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2-\iota\gamma\,\omega}$$ (۱۳)



نمودار(۱): نمودار گذردهی الکتریکی بر حسب فرکانس رسم شده است. نمودار آبی نشان دهنده قسمت موهومی گذردهی(جذب)،نمودار قرمز نشان دهنده قسمت حقیقی و نمودار سبز نشان دهنده تقویت است.

در بخش موهومی به صورت کلی داریم

$$\text{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2\varepsilon(\omega)+k^2c^2}\right)=\frac{\omega^2\,\text{Im}\,\varepsilon(\omega)}{\left(-\omega^2\,\text{Re}\,\varepsilon(\omega)+k^2c^2\right)^2+\left(\omega^2\,\text{Im}\,\varepsilon(\omega)\right)^2}$$

(۱۴)

اگر بتوانیم از قسمت موهومی ضرایب گذردهی الکتریکی چشم پوشی کنیم یعنی جذب (اتلاف) را در نظر نگیریم، داریم:

$$\lim_{\text{Im}\,\varepsilon(\omega)\to 0}\frac{\omega^2\,\text{Im}\,\varepsilon(\omega)}{\left(-\omega^2\,\text{Re}\,\varepsilon(\omega)+k^2c^2\right)^2+\left(\omega^2\,\text{Im}\,\varepsilon(\omega)\right)^2}=\pi\delta(k^2c^2-\omega^2\,\text{Re}\,\varepsilon(\omega))$$

(۱۵)

با استفاده از این تقریب و رابطه‌ی (۱۰) شدت تابش بردار واحد زمان به این شکل بدست می‌آید :

$$\frac{dw}{dt}=\frac{e^2 v}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2\,\text{Re}\,\varepsilon(\omega)}\right)d\omega$$ (۱۶)

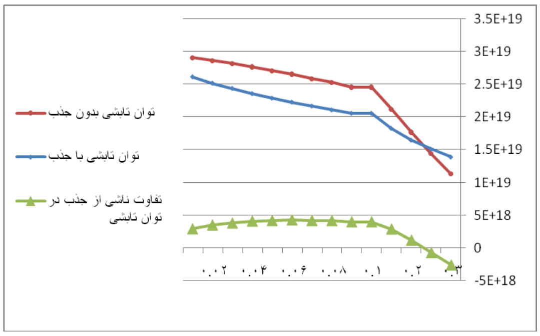
البته این تقریب در مواردی که نسبت بخش موهومی به بخش حقیقی ضریب گذردهی از حدی کوچکتر باشد، نیز صادق است.

در صورتی که پاشندگی محیط را نیز در نظر بگیریم دیگر نمی‌توانیم از تقریب $\text{Im}\,\varepsilon(\omega)\to 0$ استفاده کنیم و با این شرایط شدت تابشی را باید در حالت کلی بررسی کرد.

$$\frac{dw}{dt}=\frac{e^2 v}{2\pi^2\varepsilon_0 c^2}\int_0^{\infty}k\,dk\int_0^{\infty}\omega\,d\omega\left[1-\frac{\omega^2}{k^2v^2}\right]\text{Im}\left(\frac{1}{-\omega^2\varepsilon(\omega)+k^2c^2}\right)$$

$$=\frac{e^2 v}{2\pi^2\varepsilon_0 c^2}\int_0^\infty k\,dk\int_0^\infty \omega\, d\omega\left[1-\frac{\omega^2}{k^2 v^2}\right]\left(\frac{\omega^2\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)}{\left(-\omega^2\varepsilon(\omega)+k^2c^2\right)^2+\left(\omega^2\,\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)\right)^2}\right) \qquad (۱۷)$$

با توجه به نمودار (۱) دیده می‌شود که در فرکانس‌هایی نزدیک فرکانس تشدید ω_0 باید حتماً اتلاف را در نظرگرفت چون جذب محیط باعث کاهش شدت تابش چرنکوف می‌شود. این افت شدت تابشی وابستگی به ظریب میرایی محیط (γ) دارد. در حالت کلی با افزایش γ این تغییر در شدت محسوس‌تر می‌شود. با استفاده از محاسبات عددی رابطه‌ی (۱۶) و (۱۷) توان تابشی را با احتساب اتلاف و بدون اتلاف محاسبه کرده و در نمودار (۲) نمایش می‌دهیم. همانطور که در نمودار دیده می‌شود در نظر گرفتن اتلاف در نتیجه نهایی بسیار موثر است. با تغییر ضریب میرایی محیط، اختلاف در توان تابش چرنکوف در محیطی بدون جذب با توان تابش چرنکوف در محیط جاذب تغییر می‌کند.



نمودار (۲): در این نمودار توان تابشی بر حسب گذردهی الکتریکی رسم شده است.هدف این نمودار مقایسه توان تابشی چرنکوف در محیطهای جاذب وبدون اتلاف است، و در اینجا $\beta = 0.8$ و $\frac{\omega_0}{\omega_p}=1$

حال در مدل نوسانگر لورنتسی اگر محیط را جاذب در نظر نگیریم یعنی حالت تقویت کننده در نظر بگیریم ،

$$\varepsilon_A(\omega)=1+\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2-\omega^2+i\,\gamma\,\omega} \qquad (۱۸)$$

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon_A(\omega)=\frac{-\omega_p^2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2+i\,\gamma\,\omega} \qquad (۱۹)$$

در این‌صورت با استفاده ازجایگذاری قسمت موهومی ضریب گذردهی

الکتریکی درون رابطه شدت تابشی استنباط می‌شود که رابطه تابش چرنکوف به نوعی وارون شده است که این وارونی نشان دهنده بازگشت انرژی به ذره باردار متحرک است .

۳- نتیجه‌گیری

وقتی ذره باردار درون محیط مادی با سرعتی بیش از سرعت فاز نور در محیط حرکت کند در صورتی که محیط مادی را پاشنده در نظر بگیریم توان تابشی با تغییر در ضریب میرایی تغییر می‌کند و این توان تابش با حالتی که پاشندگی را در نظر نگیریم متفاوت است.

مراجع:

[۱] P. A. Œerenkov, "Visible Radiation Produced by Electrons Moving in a Medium with Velocities Exceeding that of Light," Physical Review 52, 378-379 (1973).

[2] R. Matloob, and A. Ghaffari, "Œerenkov radiation in a causal permeable medium," Physical Review A **70**, 052116 (2004).

[3] F. Kheirandish, and M. Soltani, "*Extension of the Huttner-Barnett model to a magnetodielectric medium*," Physical Review A **78**, 012102 (2008).