



بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی



تأثیر پارامتر نامیزانی بر درهم‌تنیدگی بین دو اتم سه‌ترازی نوع Λ و یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدت

باغشاهی حمیدرضا^۱، توسلی محمد کاظم^۱ و اخترشناس سید جواد^۲

^۱گروه اتمی و مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

^۲گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

چکیده - در این مقاله برهم‌کنش بین دو اتم سه‌ترازی نوع Λ و یک میدان تک‌مد هم‌دوس با جفت‌شدگی وابسته به شدت را در نظر گرفته‌ایم. بعد از یافتن تابع موج صریح اتم-میدان، درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان با استفاده از معیار تلاقی بررسی می‌شود. همچنین تأثیر پارامتر نامیزانی و میانگین اولیه تعداد فوتون‌های میدان بر روی درهم‌تنیدگی مورد بحث قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهند که درهم‌تنیدگی اتم‌ها و میدان می‌تواند توسط این دو کمیت کنترل شود.

کلیدواژه- پارامتر نامیزانی- درهم‌تنیدگی- جفت‌شدگی وابسته به شدت- تلاقی- مدل جینز-کامینگز.

کد PACS- اپتیک کوانتومی، ۲۷۰/۰۲۷۰.

The Effect of Detuning Parameter on the Entanglement between Two Λ -Type Three-Level Atoms with a Single-Mode Cavity Field via Intensity-Dependent Coupling

Baghshahi Hamid Reza¹, Tavassoly Mohammad Kazem¹ and Akhtarshenas Seyed Javad²

¹Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

²Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad

Abstract- In this paper we consider the interaction between two Λ -type three-level atoms and a single-mode coherent cavity field with intensity-dependent coupling. After obtaining the explicit form of the atom-field state vector, the entanglement between the two atoms and the applied field is examined by using the concurrence measure. Also, the effects of the detuning parameter as well as initial mean photon number on the entanglement are discussed. The results show that, the atom-field entanglement can be sensitively controlled via these parameters.

Keywords: Detuning parameter, Entanglement, Intensity-dependent coupling, Concurrence, Jaynes-Cummings model.

PACS No: Quantum Optics (۲۷۰,۰۲۷۰)

۱- مقدمه

$$\hat{H}_I = g_1 \sum_{m=1}^2 (\sigma_{12}^{(m)} \hat{A} e^{i\Delta_1 t} + \sigma_{21}^{(m)} \hat{A}^\dagger e^{-i\Delta_1 t}) + g_2 \sum_{m=1}^2 (\sigma_{13}^{(m)} \hat{A} e^{i\Delta_2 t} + \sigma_{31}^{(m)} \hat{A}^\dagger e^{i\Delta_2 t}) \quad (1)$$

به طوری که $\hat{\sigma}_{ik} = |i\rangle\langle k|$ عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده اتمی، g_1 و g_2 ثابت‌های جفت‌شدگی اتم و میدان، اندیس m شمارنده‌ی اتم‌های ۱ و ۲ و $\hat{A} = \hat{a} f(\hat{n})$ و $\hat{A}^\dagger = f(\hat{n}) \hat{a}^\dagger$ عملگرهای نابودی و آفرینش تغییر شکل‌یافته‌ی f هستند به طوری که $f(\hat{n})$ یک تابع عملگر-مقدار وابسته به شدت است. همچنین $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_2 - \Omega$ و $\Delta_2 = \omega_1 - \omega_2 - \Omega$ پارامترهای نامیزانی بین دو گذار اتمی و بسامد میدان (Ω) هستند. با توجه به اینکه اطلاعات هر سامانه در تابع موج آن نهفته است، بنابراین در این قسمت با استفاده از هامیلتونی بالا و در نظر گرفتن تابع موجی به شکل:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [C_1(n,t)|1,1,n\rangle + C_2(n,t)(|1,2,n+1\rangle + |2,1,n+1\rangle) + C_3(n,t)(|1,3,n+1\rangle + |3,1,n+1\rangle) + C_4(n,t)(|2,3,n+2\rangle + |3,2,n+2\rangle) + C_5(n,t)|2,2,n+2\rangle + C_6(n,t)|3,3,n+2\rangle] \quad (2)$$

ضرایب بسط تابع موج را با استفاده از حل معادله شرودینگر وابسته به زمان به دست می‌آوریم. برای رسیدن به این هدف شرایط اولیه اتم‌ها و میدان مورد نیاز است، به همین منظور حالت اولیه میدان را حالت همدوس و حالت اولیه اتم‌ها را حالت برانگیخته‌اشان در نظر می‌گیریم.

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_n C_1(n,0)|1,1,n\rangle \quad (3)$$

$$C_1(n,0) = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

به منظور ساده‌شدن مسأله $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ در نظر گرفته و بدون کاسته‌شدن از کلیت آن فرض می‌کنیم $g_1 = g_2 = g$. با در نظر گرفتن این شرایط پس از انجام محاسبات طولانی ضرایب بسط تابع موج با استفاده از روش تبدیل لاپلاس به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(4)$$

بررسی برهم‌کنش اتم و میدان با استفاده از رهیافت کوانتومی، ویژگی‌های جدیدی از ماهیت کوانتومی اتم و میدان را به نمایش می‌گذارد. پایه و اساس این رهیافت در بیشتر موارد مدل ساده، قابل حل و تعمیم‌پذیر جینز-کامینگز است [۱]. همان‌طور که ذکر شد یکی از ویژگی‌های ممتاز مدل جینز-کامینگز تعمیم‌پذیری آسان این مدل است. در سال‌های اخیر برای این مدل تعمیم‌های مختلفی از جمله جفت‌شدگی وابسته به شدت [۲]، جایگزینی چند اتم به جای یک اتم [۳]، چند میدان به جای یک میدان [۴]، اتم چندترازی به جای اتم دوترازی [۵ و ۶] و ... در نظر گرفته شده است. به عنوان مثال برهم‌کنش انواع مختلف اتم‌های سه‌ترازی با توجه به خواص غیرکلاسیکی‌شان که باعث کاربرد آنها در پدیده‌های کوانتومی از قبیل شفافیت الکترومغناطیسی و لیزر بدون وارونی جمعیت شده است به شدت مورد توجه بوده است [۷]. از سوی دیگر یکی از کاربردهای مهم مدل جینز-کامینگز ایجاد حالت‌های درهم‌تنیده است. با توجه به اهمیت حالت‌های درهم‌تنیده در پردازش اطلاعات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و ... این حالت‌ها به شدت مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند [۸]. در این مقاله برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع A با یک میدان تک‌مد وابسته به شدت را با در نظر گرفتن پارامتر نامیزانی مورد بررسی قرار می‌دهیم. علیرغم پیچیدگی سامانه، حتی در حضور پارامتر نامیزانی (که در کارهای قبل در نظر گرفته نشده است [۹]) شکل صریح تابع موج اتم-میدان محاسبه و با استفاده از آن درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را با استفاده از معیار تلاقی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به ویژه تأثیر پارامتر نامیزانی و میانگین تعداد فوتون‌های اولیه میدان بر روی این معیار بررسی می‌شود.

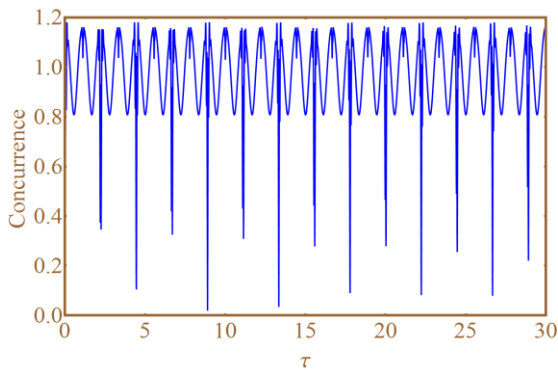
۲- توصیف مدل

هامیلتونی برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع A با ترازهای $|1\rangle$ ، $|2\rangle$ و $|3\rangle$ و بسامدهای اتمی ω_1 ، ω_2 و ω_3 ($\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$) با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدت در تصویر برهم‌کنش را به صورت زیر توصیف می‌کنیم:

باشیم، تلاقی تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می شود [۱۱]:

$$C_{AB} = \sqrt{2(1 - \text{tr} \rho_A^2)} \quad (7)$$

که در آن ρ_A ماتریس چگالی کاهش یافته مربوط به زیرسامانه A است که با گرفتن رد از ماتریس چگالی کل سامانه ρ_{AB} ، روی مؤلفه های زیر سامانه B به دست می آید. کران بالای تلاقی تعمیم یافته برای سامانه های خالص برابر است با $\sqrt{2(D-1)/D}$. بنابراین در اینجا با توجه به این که بررسی درهم تنیدگی بین دو اتم سه ترازوی ($D=6$) و میدان ($D'=\infty$) مورد نظر است کران بالای درهم تنیدگی تقریباً برابر 1.3 است.



شکل ۱: معیار تلاقی بر حسب پارامتر بدون بعد $\tau = gt$ به ازای

$$\Delta = 0 \text{ و } f(n) = \sqrt{n}, |\alpha|^2 = 25$$

شکل ۱ در هم تنیدگی بین دو اتم و میدان را برای حالتی که تعداد متوسط اولیه فوتون های میدان برابر ۲۵ باشد را برای تابع غیر خطی $f(n) = \sqrt{n}$ و در غیاب پارامتر نامیزانی نشان می دهد. در اینجا لازم به ذکر است که تابع $f(n) = \sqrt{n}$ به طور طبیعی در هامیلتونی هایی که توصیف کننده برهم کنش یک اتم دوترازی با میدان تابشی و با جفت شدگی وابسته به شدت هستند ظاهر شده است [۱۲ و ۱۳]. با توجه به این نمودار، مشخص است که میزان درهم تنیدگی بین اتم ها و میدان به صورت منظم بین مقدار بیشینه و کمینه نوسان می کند. شکل ۲ به منظور بررسی تأثیر پارامتر نامیزانی بر درهم تنیدگی بین اتم ها و میدان رسم شده است. با توجه به این نمودار پیداست که پارامتر نامیزانی اثر مثبتی بر درهم تنیدگی دو اتم و میدان دارد. در حضور این نامیزانی، پارامتر تلاقی بین نقاط بیشینه و کمینه با دامنه کمتری نوسان می کند.

$$C_1(n, t) = C_1(n, 0) \sum_{j=1}^3 b_j e^{\mu_j t} (-2\Delta^2 + 4V_2^2 + \mu_j(\mu_j - 3i\Delta))$$

$$C_2(n+1, t) = C_3(n+1, t) = -V_1 C_1(n, 0) \sum_{j=1}^3 b_j e^{\mu_j t} (i\mu_j + 2\Delta)$$

$$C_4(n+2, t) = C_5(n+2, t) = C_6(n+2, t) = -2V_1 V_2 C_1(n, 0) \sum_{j=1}^3 b_j e^{\mu_j t}$$

که در آن ها $V_2 = g f(n+2)\sqrt{n+2}$ ، $V_1 = g f(n+1)\sqrt{n+1}$ و μ_j ها ریشه های معادله درجه سوم $\mu^3 + x_1 \mu^2 + x_2 \mu + x_3 = 0$ با $x_1 = -3i\Delta$ ، $x_2 = 4(V_1^2 + V_2^2)$ و $x_3 = -8i\Delta V_1^2$ هستند که با استفاده از دستور کاردان به صورت زیر به دست می آیند:

$$\mu_j = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}\sqrt{x_1^2 - 3x_2} \cos\left[\theta + \frac{2}{3}(j-1)\pi\right], \quad j=1,2,3$$

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left[\frac{9x_1 x_2 - 2x_1^3 - 27x_3}{2(x_1^2 - 3x_2)^{3/2}} \right] \quad (8)$$

همچنین b_j ها در (۴) به شکل زیر تعریف شده اند:

$$b_j = \frac{1}{\mu_{jk} \mu_{jl}}, \quad j \neq k \neq l = 1, 2, 3 \quad (9)$$

$$\mu_{jk} = \mu_j - \mu_k$$

۳- درهم تنیدگی

با داشتن تابع موج سامانه می توان به بررسی خواص غیر کلاسیکی آن پرداخت. در اینجا با توجه به اهمیت درهم تنیدگی کوانتومی، به بررسی درهم تنیدگی بین دو اتم و میدان می پردازیم. برای تعیین درجه درهم تنیدگی معیارهای مختلفی از جمله آنتروپی فون-نویمن، آنتروپی خطی، منفیت، تلاقی و ... وجود دارد که با توجه به ابعاد زیرسامانه ها، خالص یا آمیخته بودن حالت مربوط به دو زیرسامانه و ... می توان از این ها استفاده نمود [۱۰]. اما برای محاسبه درهم تنیدگی بین اتم ها و میدان در سامانه مورد بحث، با توجه به خالص بودن حالت سامانه و همچنین حالت اولیه آن معیارهای متفاوتی قابل استفاده هستند؛ اما معیار مورد استفاده در این مقاله تلاقی تعمیم یافته است. در صورتی که دو زیرسامانه A و B را به ترتیب با ابعاد D و D' ($D \leq D'$) در نظر بگیریم و با یک سامانه خالص شامل این دو زیر سامانه سر و کار داشته

تحلیلی به دست آمد. با استفاده از تابع موج به دست آمده درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را با استفاده از معیار تلاقی تعمیم‌یافته و با انتخاب یک تابع غیرخطی شناخته شده به صورت $f(n) = \sqrt{n}$ به دست آوردیم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که با تنظیم اختلاف بسامد بین میدان و گذارهای اتمی (Δ) و متوسط تعداد اولیه فوتون‌های میدان ($|\alpha|^2$) می‌توان میزان درهم‌تنیدگی بین دو اتم و میدان را کنترل کرد. بدیهی است که رهیافت ارائه شده قابل کاربرد برای هر تابع غیرخطی دلخواهی است و واضح است که با تغییر جفت‌شدگی وابسته به شدت می‌توان به رفتارهای متفاوتی از درهم‌تنیدگی دست یافت. همچنین محاسبه و ارزیابی سایر کمیت‌های غیرکلاسیکی مانند چلانگی، آمار زیرپواسونی و ... نیز به سهولت ممکن است که در این مختصر نمی‌گنجد.

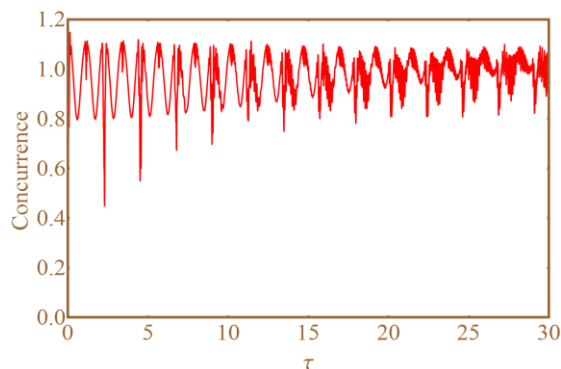
مراجع

- [۱] E.T. Jaynes, F. W. Cummings, **Proc. IEEE**, ۵۱ (۱۹۶۳) ۸۹.
 [۲] B. Buck and C. V. Sukumar, ۱۹۸۱ **Phys. Lett. A** ۸۱ (۱۹۸۱) ۱۳۲.
 [۳] S. Bougoua, Z. Ficek **Z Phys. Rev. A** ۸۸ (۲۰۱۳) ۰۲۲۳۱۷
 [۴] M. J. Faghihi, M. K. Tavassoly, **J. Opt. Soc. Am. B** ۳۰ (۲۰۱۳) ۲۸۱۰.
 [۵] H. R. Baghshahi, M. K. Tavassoly, **Phys. Scr.** ۸۹ (۲۰۰۱) ۰۷۵۱۰۱.
 [۶] M. J. Faghihi, M. K. Tavassoly, **J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.** ۴۶ (۲۰۱۳) ۱۴۵۵۰۶
 [۷] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge: Cambridge University Press (۱۹۹۷)
 [۸] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, England, ۲۰۰۰.

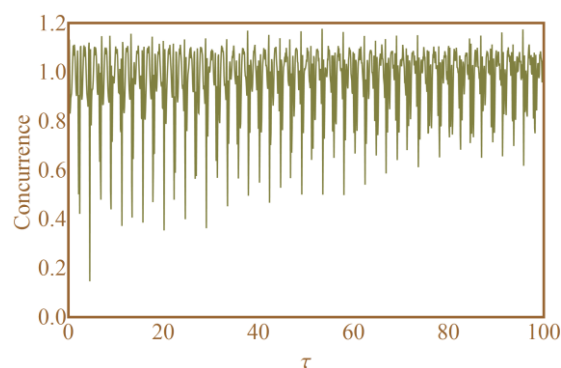
[۹] حمیدرضا باغشاهی، محمد کاظم توسلی، عباس بهجت، چلانگی و آمار کوانتومی در برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع Ξ با یک میدان تک‌مد، بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران، دانشگاه صنعتی شیراز، ۳ تا ۵ بهمن، دانشگاه صنعتی شیراز.

- [۱۰] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki **Rev. Mod. Phys.** ۸۱ (۲۰۰۹) ۸۶۵
 [۱۱] P. Rungta, V. Buzek, CM. Caves, M. Hillery, G. J. Milburn, **Phys. Rev. A**, ۶۴ (۲۰۰۱) ۰۴۲۳۱۵.
 [۱۲] S. Singh, **Phys. Rev. A** ۲۵ (۱۹۸۲) ۳۲۰۵.
 [۱۳] J. M. Fink, M. Goppl, M. Baur, R. Bianchetti, P. J. Leek, A. Blais, A. Wallraff, **Nature** ۴۵۴ (۲۰۰۸) ۳۱۵.

به عبارت دیگر هرچند در حضور پارامتر نامیزانی مقدار بیشینه درهم‌تنیدگی تا حدی کم می‌شود ولی با گذشت زمان دامنه این افت و خیزها کاهش یافته و درهم‌تنیدگی در حوالی مقدار بیشینه بیشتر تثبیت می‌شود.



شکل ۲: معیار تلاقی بر حسب پارامتر بدون بعد $\tau = gt$ با پارامترهای مشابه شکل ۱ ولی با $\Delta = 15$.



شکل ۳: معیار تلاقی بر حسب پارامتر بدون بعد $\tau = gt$ با پارامترهای مشابه شکل ۱ ولی با $|\alpha|^2 = 4$.

در شکل ۳ تأثیر میانگین تعداد اولیه تعداد فوتون‌های میدان بر درهم‌تنیدگی اتم‌ها و میدان بررسی شده است، نمودار نشان می‌دهد که کاهش مقدار میانگین تعداد فوتون‌ها از ۲۵ به ۴ باعث افزایش مقادیر کمینه تلاقی در طول زمان می‌شود. هرچند دیگر شاهد نوسان‌های منظم این کمیت در مقایسه با شکل ۱ نیستیم.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله برهم‌کنش دو اتم سه‌ترازی نوع A با یک میدان تک‌مد با جفت‌شدگی وابسته به شدت را در حضور پارامترهای نامیزانی مورد بررسی قرار دادیم. با حل معادله شرودینگر وابسته به زمان و استفاده از تبدیل لاپلاس علیرغم پیچیدگی مسأله، تابع موج صریح سامانه به صورت