بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

بسط تابع گرین میدان الکترومغناطیسی در حضور مواد مگنتودی‌الکتریک

مرجان جعفری

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره) قزوین، قزوین

چکیده – در این مقاله با استفاده از لاگرانژی کل سامانه و استفاده از تکنیک انتگرال تابعی، یک بسط برای تابع گرین میدان الکترومغناطیسی در حضور مواد مگنتودی الکتریک بدست آوردیم. متغیر بسط در این سری پذیرفتاری الکتریکی و مغناطیسی ماده می باشد. سپس معادله لانژوین را برای این سامانه محاسبه نمودیم و نهایتا انرژی آزاد را برای مواد با شکل دلخواه با استفاده از بسط تابع گرین بدست آوردیم.

کلید واژه- انتگرال مسیر، انرژی آزاد، تابع پذیرفتاری، تابع گرین .

Green’s function expansion of Electromagnetic field in the presence of a magneto-dielectric medium

Marjan Jafari

Imam Khomeini International University of Ghazvin, Ghazvin

Abstract- Starting from a Lagrangian and using functional- integrals techniques, series expansions of Green function of electromagnetic field in the presence of magneto-dielectrics, are obtained. The parameter of expansion in this series is the magnetic and electric susceptibility of the medium. Non-relativistic Langevin type equation is derived. Series expansions for Free energy in finite temperature and for arbitrary matter distribution are derived.

Keywords: Free- energy, Green’s function, Path Integral, Susceptibility function.

۱- مقدمه

نظریه میدان کوانتومی، مکانیک کوانتومی سیستم های پیوسته می‌باشد که به‌صورت گسترده در زمینه الکترودینامیک کوانتومی گسترش یافته است. معمولا میدان‌های کوانتومی در حضور مواد مورد بررسی قرار می‌گیرند که بوسیله میدان‌های بوزونی قابل توصیف می‌باشند. برای مثال در کوانتوم اپتیک مواردی وجود دارد که میدان الکترومغناطیسی در حضور یک ماده مگنتودی‌الکتریک مورد بررسی قرار می‌گیرد[۳-۱] و یا در محاسبه اثر میدان ماده روی نیروی کازیمیر[۴-۵]، در این مواد میدان ماده مستقیما در فرآیند کوانتش میدان وارد می‌شود. متاسفانه مسائل کمی وجود دارد که کمیت‌های فیزیکی مانند نیروی کازیمیر را به صورت تحلیلی بتوان محاسبه کرد و بدست آوردن روش تقریبی ضروری می‌باشد. یک کمیت اساسی در نظریه میدان کوانتومی انتشارگر یا تابع گرین می‌باشد که کمیت‌های فیزیکی فراوانی را بدست می‌دهد. قبلا برای مواد با خاصیت قطبش الکتریکی در حضور میدان این کمیت را محاسبه نموده‌ایم [۶]. در این مقاله هدف محاسبه تابع گرین در حضور مواد با خاصیت مغناطیسی و الکتریکی می‌باشد.

در این مقاله با استفاده از روش انتگرال مسیر و بر پایه دیدگاه میکروسکوپیک، از لاگرانژی سامانه که شامل لاگرانژی میدان الکترومغناطیسی و ماده می‌باشد شروع می‌کنیم و یک بسط برای تابع برهمکنش دونقطه‌ای بر حسب پذیرفتاری‌های الکتریکی و مغناطیسی مواد بدست می‌آوریم و به عنوان یک کاربرد از این رابطه، بسطی برای انرژی آزاد یا لیف شیت در حضور مواد مگنتودی‌الکنریک بدست می‌آوریم.

۲- روش کار

الکترودینامیک کوانتومی در حضور ماده مگنتودی‌الکتریک خطی، را می‌توان با مدل سازی ماده با دو اتلافگر مستقل که با میدان الکترومغناطیسی برهمکنش می‌کنند بررسی کرد. هر اتلافگر شامل یک سری نوسانگر پیوسته سه بعدی است که خواص قطبش و مغناطش ماده را توصیف می‌کنند [۷].

بدین ترتیب لاگرانژی کل سامانه عبارت است از

$$L = L_m + L_{EM} + L_{Int} \qquad [1]$$

که همانگونه که اشاره شد از سه قسمت بترتیب لاگرانژی میدان الکترومغناطیسی و ماده و قسمت برهمکنش ماده و میدان تشکیل شده است

$$\begin{aligned}
L_{EM} &= \frac{1}{2}(E^2 + B^2) \\
L_m &= \frac{1}{2}\int d\omega\left(\left(\frac{\partial Y_\omega(\vec{x},t)}{\partial t}\right)^2 - \omega^2 Y_\omega^2(\vec{x},t)\right) + \\
&\quad \frac{1}{2}\int d\omega\left(\left(\frac{\partial X_\omega(\vec{x},t)}{\partial t}\right)^2 - \omega^2 X_\omega^2(\vec{x},t)\right) \qquad [۲] \\
L_{\text{int}} &= \int d\omega f(\vec{x},\omega)\vec{A}\cdot\frac{\partial Y_\omega(\vec{x},t)}{\partial t} + \\
&\quad \int d\omega g(\vec{x},\omega) X_\omega(\vec{x},t)\cdot\nabla\times\vec{A}(\vec{x},t)
\end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که لاگرانژی ماده از دو قسمت تشکیل شده است که وابسته به قطبش و مغناطش ماده است و خاصیت قطبش و مغناطش ماده با بینهایت نوسانگر معادل سازی شده است. در لاگرانژی برهمکنشی نیز دو ثابت جفت شدگی بین میدان و ماده وجود دارد که با پذیرفتاری الکتریکی و مغناطیسی ماده رابطه دارند.

با داشتن لاگرانژی سامانه میتوان به روش انتگرال مسیر فرآیند کوانتش را انجام داد. یک کمیت مهم در نظریه میدان تابع مولد می‌باشد که از آن تابع برهمکنش n نقطه‌ی با استفاده از مشتق تابعی محاسبه می‌شود. در این مقاله هدف محاسبه تابع برهمکنش دو نقطه‌ی بر حسب پذیرفتارهای الکتریکی و مغناطیسی ماده است. برای این هدف ابتدا تابع مولد آزاد را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
W_0 = \int D[A]\int\prod_\omega D[Y_\omega]\int\prod_\omega D[X_\omega] \\
\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int d^4x\Big[-\frac{1}{2}A_i\hat{K}_{ij}A_j \\
-\frac{1}{2}\int d\omega Y_{i,\omega}(\partial_t^2+\omega^2)Y_{j,\omega}\delta_{ij} \qquad [۳] \\
-\frac{1}{2}\int d\omega X_{i,\omega}(\partial_t^2+\omega^2)X_{j,\omega}\delta_{ij} + J_i A_i \\
+\int d\omega J_{i,\omega}Y_{i,\omega} + \int d\omega J'_{i,\omega}X_{i,\omega}\Big]\Big]
\end{aligned}$$

که در آن

$$\hat{K}_{ij} = \left[\varepsilon_0 \partial_t^2 - \frac{1}{\mu_0}\nabla^2\right]\delta_{ij} + \frac{1}{\mu_0}\partial_i \partial_j \qquad [۴]$$

و تابع مولد برهمکنشی با استفاده از تابع مولد آزاد قابل محاسبه است

$$\begin{aligned} W = \exp[\int d^4x[\int d\omega f(x,\omega) A_i \partial_t Y_{i,\omega} \\ + \int d\omega g(x,\omega) X_{i,\omega} \partial_{x_j} A_k \varepsilon_{ijk}]]W_0 \end{aligned} \qquad [۵]$$

بدین ترتیب تابع گرین از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} G_{ij}(x,x') = (\frac{i}{\hbar})^2 \\ \frac{\delta^2}{\delta J_i(x)\delta J_j(x')} W[J,J_\omega,J'_\omega]\Big|_{J,J_\omega,J'_\omega=0} \end{aligned} \qquad [۶]$$

پس از انجام محاسبات طولانی بسطی متشکل از سه قسمت حاصل می‌شود که قسمت اول تابع گرین حاصل از خاصیت قطبش ماده می باشد و بسط بر حسب پذیرفتاری الکتریکی ماده صورت گرفته است، قسمت دوم تابع گرین از خاصیت مغناطش ماده حاصل می‌شود و بسط بر حسب پذیرفتاری مغناطیسی ماده می‌باشد و جمله سوم برهمکنش قطبش و مغناطش است و جملات بسط بر حسب حاصلضرب پذیرفتاری الکتریکی و مغناطیسی ماده می‌باشند

$$G_{ij}(x,x') = G_{ij}^E(x,x') + G_{ij}^M(x,x') + G_{ij}^{EM}(x,x') \qquad [۷]$$

در فضای فوریه زمانی تابع گرین مربوط به پذیرفتاری الکتریکی را به صورت زیر خواهیم داشت

[۸]

$$\begin{aligned} G_{ll'}^E(x-x',\omega) = G_{ll'}^0(x-x',\omega) \\ + \int d^3z_1 G_{li}^0(x-z_1)[\omega^2\chi_e(\omega,z_1)]G_{il'}^0(z_1-x',\omega) \\ + \int d^3z_2 \int d^3z_1 G_{li}^0(x-z_1)[\omega^2\chi_e(\omega,z_1)] \\ G_{im}^0(z_1-z_2,\omega)[\omega^2\chi_e(\omega,z_2)]G_{ml'}^0(z_2-x',\omega)+... \end{aligned}$$

و جمله تابع گرین مربوط به پذیرفتاری مغناطیسی ماده عبارت است از

[۹]

$$\begin{aligned} G_{ll'}^M(x-x',\omega) = \\ \int d^3z_1 \frac{\partial}{\partial z_{1j}} G_{kl}^0(x-z_1)[\chi_m(z_1,\omega)]\frac{\partial}{\partial z_{1j}} G_{kl'}^0(z_1-x') \\ + \int d^3z_2 \int d^3z_1 \frac{\partial}{\partial z_{1j}} G_{kl}^0(x-z_1)[\chi_m(z_1,\omega)] \\ \frac{\partial}{\partial z_{1j}} \frac{\partial}{\partial z_{2j'}} G_{kk'}^0(z_1-z_2)[\chi_m(z_2,\omega)]\frac{\partial}{\partial z_{2j'}} G_{k'l'}^0(z_2-x') \\ +... \end{aligned}$$

همانگونه که انتظار می‌رفت مشتق‌های مرتبه اول و دوم تابع گرین میدان الکترومغناطیسی فضای آزاد در بسط ظاهر شدند.

جمله سوم تابع گرین نیز عبارت است از

$$\begin{aligned} G_{ll'}^{EM}(x-x',\omega) = \int d^3z_1 \int d^3z_2 G_{li}^0(x-z_1,\omega) \\ [\omega^2\chi_e(z_1,\omega)]\frac{\partial}{\partial z_{1j}} G_{ki}^0(z_1-z_2,\omega)[\chi_m(z_2,\omega)] \\ \frac{\partial}{\partial z_{2j}} G_{kl'}^0(z_2-x',\omega)+... \end{aligned} \qquad [۱۰]$$

که در روابط بالا پذیرفتاری‌های الکتریکی و مغناطیسی را به صورت زیر داریم

$$\chi_e(x,\omega) = \int d\omega' \frac{f^2(\omega',x)}{\omega'^2-\omega^2-\iota 0^+} \qquad [۱۱]$$

$$\chi_m(x,\omega) = \int d\omega' \frac{g^2(\omega',x)}{\omega'^2-\omega^2-\iota 0^+} \qquad [۱۲]$$

و تابع گرین میدان الکترومغناطیسی آزاد عبارت است از

$$\begin{aligned} G_{ij}^0(r=x-x',i\nu_l) = \frac{\nu_l^2}{c^2}\frac{e^{-\frac{\nu_l r}{c}}}{4\pi r} \\ [\delta_{ij}(1+\frac{c}{\nu_l r}+\frac{c^2}{\nu_l^2 r^2}) - \frac{r_i r_j}{r^2}(1+\frac{3c}{\nu_l r}+\frac{3c^2}{\nu_l^2 r^2})] \\ +\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta^3(r) \end{aligned} \qquad [۱۳]$$

با استفاده از معادلات اویلر لاگرانژ و اندکی محاسبات ریاضی معادله لانژوین سامانه که تابع گرین کلی سامانه در آن صدق می‌کند به صورت مقابل بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \nabla\times[1-\chi_m(x,\omega)]\nabla\times\vec{G}(x-x',\omega) \\ -\omega^2[1+\chi_e(x,\omega)]\vec{G}(x-x',\omega) = \delta(x-x') \end{aligned} \qquad [۱۴]$$

لازم به ذکر است که هندسه اجسام در برهمکنش با

میدان الکترومغناطیسی با استفاده از ثابت جفت شدگی میدان و ماده معین می‌شود.

۳- تابع پارش

با استفاده از رابطه بسطی تابع گرین، می‌توان تابع پارش رادر حضور مواد مگنتودی‌الکتریک که با پذیرفتاری‌های الکتریکی و مغناطیسی مشخص می‌شوند بدست آورد. تابع پارش میدان الکترومغناطیسی در حضور مواد به صورت زیر می‌باشد

$$\Xi = \int D[A] e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4 x L} \qquad [۱۵]$$

در صورتی که یک چرخش ویک $\omega = i\nu_l$ در متغیر فرکانس صورت بگیرد، کنش اقلیدسی خواهد بود و انرژی آزاد از رابطه مقابل بدست می‌آید[8-9]

$$E = -\frac{\hbar}{\tau} \ln \Xi \qquad [۱۶]$$

که t زمان برهمکنش می‌باشد. با استفاده از روش انتگرال مسیر انرژی آزاد در دمای متناهی T بدست می‌آید

$$E = -k_B T \sum_{l=0}^{\infty} tr \ln[G(\iota\nu_l; x, x')] \qquad [۱۷]$$

در رابطه بالا $\nu_l = \frac{2\pi l k_B T}{\hbar}$ فرکانس ماتسوبارا و k_B ثابت بولتزمن است.

با استفاده از رابطه [۷] و جایگذاری در رابطه بالا تابع پارش بر حسب پذیرفتاری های الکتریکی و مغناطیسی بدست می‌آید.

در دمای صفر، جمع روی مقادیر l با انتگرال $\hbar\int_0^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} f(i\nu) \to k_B T \sum_{l=0}^{\infty} f(i\nu_l)$ جایگزین می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله بر پایه دیدگاه لاگرانژی، میدان الکترومغناطیسی را در حضور مواد مگنتودی‌الکتریک مورد بررسی قرار دادیم. یک بسط برای تابع گرین سامانه بر حسب پذیرفتاری‌های الکتریکی و مغناطیسی ماده بدست آمد. به عنوان یک کاربرد از بسط تابع گرین محاسبه شده در مقاله، انرژی آزاد سامانه بر حسب پذیرفتاری ها بدست آمد.

مراجع

[1] Vogel W.,Welsch D.-G., *Quantum optics*, 3rd ed, WILEY-VCH Vergal GmbH and Co. KGaA, Weinheim, 2007.

[2] Kheirandish F. and Amooshahi M., *Electromagnetic field quantization in a linear polarizable and magnetizable medium*, **Phys. Rev. A.** 74(2006) 042102.

[3] Matloob R. *et al.*, *Electromagnetic field quantization in amplifying dielectrics*, **Phys. Rev. A** 55 (1997) 1623;

[4] Matloob R. and Falinejad. H, *Casimir force between two dielectric slabs*, **Phys. Rev. A** 64 (2001) 042102;

[5] Kheirandish F., Soltani M., and Sarabadani J., *Casimir force in the presence of a medium*, **Phys. Rev. A** 81 (2010) 052110.

[6] kheirandish F., Jafari M., *Perturbative approach to calculating the Casimir force in fluctuating scalar and vector fields* ,**Phys. Rev. A** 86 (2012) 022503.

[7] Hopfield J. J., *Theory of the Contribution of Excitons to the Complex Dielectric Constant of Crystals*, **Phys. Rev**. 112 (1958) 1555.

[8] Kaputsa J. I., *finite-temperature field theory*, Cambridge University Press 1989.

[9] Stone M., *The Physics of Quantum Fields*, Springer-Verlag New Yok, Inc. 2000.