بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

استفاده از مدل هایزنبرگ در تولید هم‌بستگی کوانتومی توسط کانال کوانتومی محلی

فرشته شاه‌بیگی، سید جواد اخترشناس و محسن سربیشه‌ای

گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

چکیده - در این مقاله نشان می‌دهیم که برهم‌کنش اسپین-مدار مربوط به سامانه دوکیوبیتی هایزنبرگی *XYZ* دریک میدان مغناطیسی غیرهمگن می‌تواند بین یکی از کیوبیت‌های این سامانه و کیوبیت سومی که در این برهم‌کنش حضور ندارد، ایجاد هم‌بستگی کوانتومی کند. از این طریق با پارامترهای قابل تنظیم آزمایشگاهی می‌توانیم هم‌بستگی کیوبیت‌ها را کنترل کنیم.

کلید واژه-برهم‌کنش اسپین-مدار، کانال محلی، کیوبیت، هم‌بستگی کوانتومی

Using Heisenberg model in creating quantum correlation via local quantum channel

Fereshte Shahbeigi, Seyed Javad Akhtarshenas and Mohsen Sarbishaei

Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad

Abstract- In this paper we show that the spin-orbit interaction of a two-qubit Heisenberg XYZ system in an inhomogeneous magnetic field can create quantum correlation between one of the qubits of the system and the third qubit that does not contribute in the interaction. In this manner, created quantum correlation can be controlled by experimental parameters.

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]

این مقاله در صورتی دارای اعتبار است که در سایت www.opsi.ir قابل دسترسی باشد.

۱- مقدمه

مطالعه حالت‌های هم‌بسته کوانتومی از سال‌های آغازین پس از تولد مکانیک‌کوانتومی شروع شد. هرچند که در ابتدا تنها حالت‌های درهم‌تنیده به عنوان حالت‌های هم‌بسته کوانتومی مطرح بودند [1,2]، اما بعدها نشان داده شد که برخی حالت‌های غیردرهم‌تنیده (جداپذیر) نیز دارای هم‌بستگی کوانتومی‌اند [3,4]. سنجه‌های مختلفی نیز برای کمی کردن میزان هم‌بستگی کوانتومی معرفی شده‌اند که یکی از معتبرترین سنجه‌ها به نام ناهم‌خوانی کوانتومی در مرجع [3] مطرح شده است.

اخیرا نشان داده شده است که کانال‌های کوانتومی محلی قادر به ایجاد هم‌بستگی کوانتومی می‌باشند و لذا مطالعه و طبقه‌بندی کانال‌های محلی، از منظر توانایی در ایجاد هم‌بستگی کوانتومی، توجه زیادی را به خود جلب نموده است [5-9]. بنا به تعریف، کانال کوانتومی نگاشت کاملا مثبتی است که رد ماتریس را حفظ می‌کند و منظور از محلی بودن این است که این نگاشت فقط یکی از زیرسامانه‌ها را تحت تاثیر قرار می‌دهد. به لحاظ تجربی کانال‌های کوانتومی محلی نتیجه برهم‌کنش سامانه با محیط اطراف است [6,10]. در مرجع [10] شرط لازم برای اینکه هامیلتونی سامانه‌ای که در برهم‌کنش با محیط است منجر به کانالی شود که قادر به تولید هم‌بستگی کوانتومی شود ارائه شده است.

هدف ما در این مقاله مطالعه هم‌بستگی کوانتومی یک سامانه دو کیوبیتی AB است که یکی از کیوبیت‌ها (کیوبیت B) با کیوبیت سوم C در برهم‌کنش است. هامیلتونی برهم‌کنش سامانه BC یک مدل هایزنبرگی XYZ در یک میدان مغناطیسی غیرهمگن با در نظر گرفتن برهم‌کنش اسپین-مدار است که در مرجع [11] برای ایجاد درهم‌تنیدگی کوانتومی میان کیوبیت‌های BC مورد مطالعه قرار گرفته است. از طرفی در مدل ارائه شده در این مقاله هیچ برهم‌کنشی بین دو کیوبیت AB وجود ندارد و همچنین این دو کیوبیت در ابتدا با یک حالت کاملا کلاسیکی و بدون هم‌بستگی کوانتومی توصیف می‌شوند. همان‌طور که خواهیم دید برهم‌کنش کیوبیت B با کیوبیت C باعث ایجاد هم‌بستگی کوانتومی بین کیوبیت‌های AB می‌شود. در این‌صورت با توجه به این‌که تحول سامانه B موجب به‌وجود آمدن این هم‌بستگی کوانتومی شده است، لذا می‌توان آن را به منزله یک کانال محلی ایجاد کننده هم‌بستگی کوانتومی در نظر گرفت و به مطالعه میزان هم‌بستگی کوانتومی که این کانال محلی در یک حالت کاملا کلاسیکی مربوط به سامانه AB به‌وجود می‌آورد، پرداخت.

۲- معرفی و بررسی کانال:

یک سامانه متشکل از سه کیوبیت ABC را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم بین دو کیوبیت AB هیچ برهم‌کنشی وجود ندارد ولی کیوبیت‌های BC در برهم‌کنش اسپینی هستند که با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود [11]:

$$\begin{aligned} H = {} & J\gamma\left(\sigma_B^+\sigma_C^+ + \sigma_B^-\sigma_C^-\right) + \\ & \left(J + iDJ_z\right)\sigma_B^+\sigma_C^- + \\ & \left(J - iDJ_z\right)\sigma_B^-\sigma_C^+ + \\ & \left(\frac{B+b}{2}\right)\sigma_B^z + \left(\frac{B-b}{2}\right)\sigma_C^z + \\ & \frac{J_z}{2}\sigma_B^z\sigma_C^z \end{aligned} \qquad (۱)$$

دراینجا $J = \frac{J_x - J_y}{J_x + J_y}$ ، $\gamma = = \frac{J_x + J_y}{2}$ و $J_\mu\left(\mu = x, y, z\right)$ ضرایب حقیقی جفت شدگی، $\sigma^\pm = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \pm i\sigma_y\right)$ و σ_μ ماتریس‌های پائولی هستند. همچنین (B+b) میدان در مکان کیوبیت B و (B-b) میدان در مکان کیوبیت C را نشان می‌دهد و هر دو در راستای محور Z هستند، و بنابراین b میزان ناهمگنی میدان را نشان می‌دهد. بردار $\mathbf{D} = J_z D\hat{z}$ را بردار دزیالوشینسکی-موریا گویند و از مرتبه اول جفت شدگی اسپین-مدار دو کیوبیت است که همان‌طور که مشخص است با J_μ متناسب است. نمایش ماتریسی هامیلتونی بالا در پایه‌های $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ به شکل زیر خواهد بود [11]:

و عملگر تحول زمانی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$U = \exp\left(-iHt\right) \qquad (۲)$$

اکنون فرض کنیم که دو کیوبیت AB در ابتدا در حالت کلاسیکی زیر هستند:

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]

$$\rho_{cc}^{AB} = p\,|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\otimes|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + (1-p)|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\otimes|\phi_2\rangle\langle\phi_2| \quad (۳)$$

که در این عبارت $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$ است و داریم:

$$|\phi_1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$
$$|\phi_2\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|0\rangle - e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (۴)$$

اگر کیوبیت B تحت تاثیر کانال محلی قرار گیرد و حالت (3) به شکل زیر تبدیل یابد:

$$\rho_{cq}^{AB} = p\,|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\otimes\rho_1^B + (1-p)|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\otimes\rho_2^B \quad (۵)$$

در این صورت کانال محلی در این سامانه ایجاد هم‌بستگی کوانتومی کرده است [5]، اگر شرط $\left[\rho_1^B,\rho_2^B\right]\neq 0$ برقرار باشد. در مطالعه ما کانال نتیجه اندرکنش بین کیوبیت‌های BC است که هامیلتونی آن در بالا معرفی شد. فرض کنیم که این سامانه سه کیوبیتی در ابتدا با عملگر چگالی $\rho^{ABC}=\rho^{AB}\otimes\rho^{C}$ توصیف می‌شود. در این مطالعه حالت اولیه کیوبیت C یک حالت خالص به شکل $\rho_0^C = |\psi'\rangle\langle\psi'|$ در نظر گرفته شده‌است که در آن $|\psi'\rangle = \cos\frac{\theta'}{2}|0\rangle + e^{-i\varphi'}\sin\frac{\theta'}{2}|1\rangle$ می‌باشد. در این صورت این کانال را با فرض اینکه حالت اولیه BC جداپذیر باشد می‌توان به صورت زیر نمایش داد [10]:

$$\rho_i^B = \Lambda\left(|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\right) = Tr_C\left[U\left(|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\otimes\rho_0^C\right)U^t\right] \quad (۶)$$

که در این عبارت U عملگر تحول زمانی سامانه دوکیوبیتی BC است که در بالا معرفی شد.

۲-۱- بررسی خواص کانال:

شرط لازم و کافی برای آن‌که یک کانال محلی در سامانه‌های کیوبیتی ایجاد هم‌بستگی کند، این است که کانال یونیتال و نیمه‌کلاسیکی نباشد [6,7]. بنا به تعریف یک کانال یونیتال است، اگر $\Lambda\left(\frac{I}{d}\right)=\frac{I}{d}$ و نیمه‌کلاسیکی است، اگر به ازای هر ρ داشته باشیم $\Lambda(\rho)=\sum p_k(\rho)|k\rangle\langle k|$، یعنی همه ماتریس‌های چگالی ورودی را در یک پایه خاص قطری کند.

بررسی غیریونیتال بودن کانال: برای بررسی یونیتال بودن یا نبودن کانال باید عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$\Lambda\left(\frac{I}{2}\right) = Tr_C\left[U\left(\frac{I}{2}\otimes\rho_0^C\right)U^t\right] = \begin{bmatrix}\rho_{11}^B & \rho_{12}^B\\ \left(\rho_{12}^B\right)^* & 1-\rho_{11}^B\end{bmatrix} \quad (۷)$$

بعد از انجام محاسبات به دست می‌آوریم:

$$\rho_{12}^B = \frac{\cos\frac{\theta'}{2}\sin\frac{\theta'}{2}}{2}\left(u_{11}u_{32}^* + u_{23}u_{44}^*\right)e^{-i\varphi'} + \frac{\cos\frac{\theta'}{2}\sin\frac{\theta'}{2}}{2}\left(u_{14}u_{33}^* + u_{22}u_{41}^*\right)e^{i\varphi'}$$

که الزاما صفر نیست و ماتریس حاصل همیشه برابر با $\frac{I}{2}$ نبوده و بنابراین کانال مورد بررسی یونیتال نیست.

بررسی نیمه کلاسیکی نبودن کانال: این کانال با توجه به شکل U که به شکل ماتریس X است به‌طور خاص هر ρ^{BC} در حالت X را به یک حالت X دیگر تبدیل می‌کند و بنابراین ρ^B حاصل حتما در پایه $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ قطری است. با درنظرگرفتن این مطلب اگر این کانال نیمه‌کلاسیکی باشد باید به ازای هر ρ^{BC} در حالت کلی، یک ρ^B قطری در پایه $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ به دست بدهد. حالت ورودی کانال را به طور عمومی به صورت $\rho^B=\frac{I+\vec{r}_B.\vec{\sigma}}{2}$ در نظر می‌گیریم که $r_B\leq 1$ بردار بلاخ کیوبیت B است.

$$\Lambda\left(\frac{I+\vec{r}_B.\vec{\sigma}}{2}\right) = \begin{bmatrix}\rho_{11}^B & \rho_{12}^B\\ \left(\rho_{12}^B\right)^* & 1-\rho_{11}^B\end{bmatrix} = Tr_C\left[U\left(\frac{I+\vec{r}_B.\vec{\sigma}}{2}\otimes|\psi'\rangle\langle\psi'|\right)U^t\right] \quad (۸)$$

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]

که اگر کانال نیمه کلاسیکی باشد باید داشته باشیم $\rho_{12}^{B}=0$. اما بعد از انجام محاسبات خواهیم داشت:

$$\rho_{12}^{B}=(1+r_z)\cos\frac{\theta'}{2}\sin\frac{\theta'}{2}\left(u_{11}u_{32}^{*}e^{-i\varphi'}+u_{14}u_{33}^{*}e^{i\varphi'}\right)+$$
$$(1-r_z)\cos\frac{\theta'}{2}\sin\frac{\theta'}{2}\left(u_{23}u_{44}^{*}e^{-i\varphi'}+u_{22}u_{41}^{*}e^{i\varphi'}\right)+$$
$$(r_x+ir_y)\left(u_{14}u_{32}^{*}\left(\sin\frac{\theta'}{2}\right)^2+u_{23}u_{41}^{*}\left(\cos\frac{\theta'}{2}\right)^2\right)+$$
$$(r_x-ir_y)\left(u_{22}u_{44}^{*}\left(\sin\frac{\theta'}{2}\right)^2+u_{11}u_{33}^{*}\left(\cos\frac{\theta'}{2}\right)^2\right)$$

که در حالت عمومی صفر نبوده و لذا کانال نیمه کلاسیکی نیست و قادر به تولید هم‌بستگی کوانتومی می‌باشد.

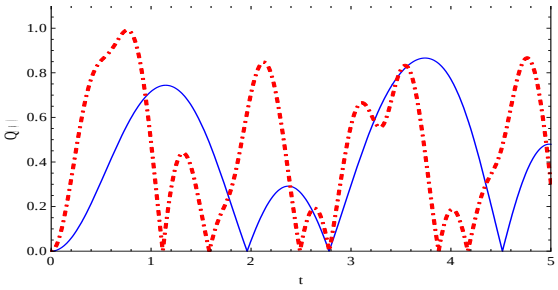
۳- محاسبه هم‌بستگی کوانتومی تولید شده توسط کانال:

در این مقاله برای تعیین میزان هم‌بستگی کوانتومی ایجاد شده توسط کانال از سنجه جابجایی [9] استفاده خواهیم کرد. فرض کنیم $\rho_1^B=\frac{I+\vec{r}_1.\vec{\sigma}}{2}$ و $\rho_2^B=\frac{I+\vec{r}_2.\vec{\sigma}}{2}$ در معادله (5)، دو حالت دلخواه از سامانه کیوبیتی B باشند. در این صورت سنجه جابجایی برای این دو حالت به‌صورت زیر تعریف می‌شود [9]:

$$Q(\rho)=4p(1-p)\left\|\left[\rho_1^B,\rho_2^B\right]\right\|_1=4p(1-p)\left|\vec{r}_1\times\vec{r}_2\right|$$

که در آن $\|A\|_1=Tr\sqrt{A^tA}$ است.

در ادامه حالت ورودی کانال یک حالت کاملا کلاسیکی به شکل (3) و حالت اولیه کیوبیت C نیز به شکل بردار $|\psi'\rangle$ که در قسمت ۲ معرفی شد، فرض شده‌است. حالت خروجی هم بر حسب معادله (5) بیان می‌شود. با محاسبه کمیت $Q(\rho)$ که به شکل تحلیلی به‌دست می‌آید، می‌توانیم به ازای مقادیر مختلف پارامترها، میزان هم‌بستگی ایجاد شده در سامانه AB را مشاهده کنیم. نمودار شکل ۱ توانایی این کانال را در تولید هم‌بستگی کوانتومی نشان می‌دهد. در رسم این نمودار فرض شده $\theta=\frac{\pi}{2},\varphi=\varphi'=\theta'=0$ که مشخص کننده حالت اولیه سامانه BC است. همچنین در تمامی این شکل‌ها از $B=0.8,J=1,p=0.5$ استفاده شده است.



شکل ۱: سنجه جابجایی برحسب زمان. در رسم این شکل b=0.75, Jz=-1, γ=0.5 و نیز D=0 (خط آبی)، D=2 (نقطه-خط‌چین قرمز) درنظرگرفته شده‌است.

۴- نتیجه‌گیری:

همان‌طور که در نمودار مشخص است برهم‌کنش بین کیوبیت‌های BC قادر است به عنوان کانال محلی بر روی کیوبیت B عمل کرده و در سامانه کلاسیکی AB هم‌بستگی کوانتومی ایجاد کند. درواقع هامیلتونی از طریق عملگر تحول زمانی بین کیوبیت B و C ایجاد درهم‌تنیدگی کرده و به علت وجود هم‌بستگی کلاسیکی بین کیوبیت‌های AB که بعد از اعمال کانال هنوز جداپذیر (غیر درهم‌تنیده) هستند ناهم‌خوانی کوانتومی ایجاد می‌شود.

مراجع:

[1] A. Einstein, B. Podolsky and Rosen, *"Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,"* **Phys. Rev**. 47, 777-780(1935).

[2] E. Schrodinger, *"Die gegenwartige situation in der Quanenmechanik,"* **Naturwissenschaften**.23,807-81 (1935).

[3] H. Ollivier, and W. H. Zurek, "Quantum discord: A measure of the quantumness of correlations," **Phys. Rev. Lett**.88, 017901 (2001).

[4] L. Henderson, and V. Vedral, *"Information, relative entropy of entanglement, and irreversibility,"* **Phys. Rev. Lett.** 84, 2263-2266 (2000).

[5] B. Dakic, V. Vedral, and C. Brukner, *"Necessary and Sufficient Condition for Nonzero Quantum Discord,"* **Phys. Rev. Lett.** 105, 190502 (2010).

[6] A. Streltsov, H. Kampermann, and D. Bruß, *"Behavior of Quantum Correlations under Local Noise,"* **Phys. Rev. Lett.** 107, 170502 (2011).

[7] X. Hu, H. Fan, D. L. Zhou, and W.-M. Liu,*"Necessary and sufficient conditions for local creation of quantum correlation,"* **Phys. Rev. A**85,032102 (2012).

[8] X. Hu, H. Fan, D. L. Zhou, and W.-M. Liu, *"Quantum correlating power of local quantum channels,"* **Phys. Rev. A**87,032340(2013).

[9] T. Abad, V. Karimipour, and L. Memarzadeh, *"Power of quantum channels for creating quantum correlations,"* **Phys. Rev. A**86,062316 (2012).

[10] C. Jara-Figueroa, A.B. Klimov, and L. Roa, *"Discording power of Hamiltonian Interactions,"* **Eur. Phys. J. D.**68, 51 (2014).

[11] F. Kheirandish, S.J. Akhtarshenas, and H. Mohammadi, *"Effect of spin-orbit interaction on entanglement of two-qubit Heisenberg XYZ systems in an inhomogeneous magnetic field,"* **Phys. Rev. A**77,042309 (2008).

[Downloaded from opsi.ir on 2025-07-13]