بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی



# فراهم آوری حالت‌های همدوس در بازآواگرهای گرافنی

مژگان، واثقی ؛ مالک، باقری هارونی

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان، خیابان هزار جریب ۸۱۷۴۶-۷۳۴۴۱ ، اصفهان

**چکیده**

**در این مقاله به بررسی نظری فراهم آوری حالت همدوس در بازآواگر گرافنی می‌پردازیم. بازآواگر گرافنی، شامل صفحه گرافن است که در حالتی که ثابت نگه داشته شده است می‌تواند ارتعاشات مکانیکی انجام دهد. از این رو این سامانه را می‌توان یک سامانه‌ی نانو مکانیکی به حساب آورد. با توجه به آن که می‌توان امکان آن را فراهم نمود که ارتعاشات صفحه گرافن در رژیم کوانتومی انجام گیرد، لذا از این سامانه می‌توان برای آماده سازی حالت‌های کوانتومی استفاده کرد. در پژوهش حاضر به بررسی فراهم‌آوری حالت همدوس در این سامانه پرداخته‌ایم. نشان می‌دهیم که در اثر برهم‌کنش صفحه گرافن با پیوندگاه فلزی و با کنترل این برهم‌کنش، می‌توان حالت همدوس در صفحه گرافن ایجاد کرد.**

کلید واژه‌ها: بازآواگرهای گرافنی، حالت‌های همدوس

# Preparation of coherent states in Graphene resonators

Mozhgan, Vaseghi; Malek, Bagheri Harouni

Department of Physics,Faculty of Science, University of Isfahan, Isfahan 81746-73441

In this paper we introduce a theoretical scheme for the preparation of coherent state in graphene resonator. Graphene resonator consists of a graphene sheet which provides mechanical vibrations. Therefore, the graphene resonator is known as a nano-mechanical system. As an important feature of the graphene resonator, this system provides mechanical vibrations in quantum regime. Accordingly, this system may be used for preparing quantum states. In the present contribution, the preparation of the coherent states is investigated. We show that as a consequence of interaction with metallic gates and control of this interaction, the coherent state can be prepared in the graphene resonators.

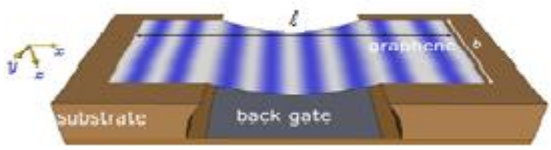
Keywords: Graphene resonators, Coherent states

## مقدمه

گرافن ورقه‌ای از گرافیت به ضخامت یک اتم کربن است که ساختار منظم آن شبیه به ساختار کندوی عسل در دو بعد است [۱]. در بیشتر تحقیقاتی که تاکنون روی گرافن انجام شده است تمرکز روی خواص الکترونیکی گرافن بوده و توجه کمی به خواص مکانیکی آن شده است. علاوه بر کاربردهای چشم‌گیر الکترونیکی گرافن، ارتعاشات مکانیکی این ماده نیز دارای اهمیت است [۲]. از ویژگی-های مهم بازآواگر گرافنی این است که ارتعاشات این صفحه در رژیم کوانتومی انجام می‌گیرد [۳]. از این رو می‌توان برای فراهم آوری حالت‌های کوانتومی از آن استفاده کرد. به عنوان مثال چگونگی فراهم آوری حالت چلانده [۴] و حالت گربه شرودینگر در این سامانه مورد بررسی قرار گرفته است [۵]. در اینجا هدف آن است که با استفاده از بازآواگر گرافنی حالت همدوس فراهم کنیم. برای این منظور ابتدا هامیلتونی ارتعاشات صفحه گرافن را به کمک حل دینامیکی یک سامانه‌ی نوسانی در یک بعد و تعمیم آن به مساله‌ی دوبعدی را پس از بدست آوردن لاگرانژی سامانه، محاسبه می‌کنیم. در ابتدا برای یک ریسمان بارگذاری شده در یک بعد لاگرانژی و سپس هامیلتونی را محاسبه می‌کنیم و آن را برای یک صفحه گرافن دو بعدی تعمیم می‌دهیم.

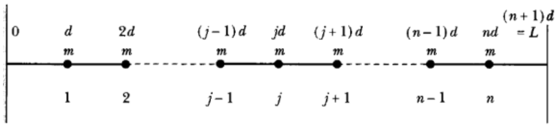
## هامیلتونی ارتعاشات صفحه گرافن

همان‌گونه که در تصویر شکل(۱) مشخص است، صفحه‌ی گرافن توسط ولتاژی که به آن اعمال شده است شروع به ارتعاش می‌کند.




شکل ۱: صفحه گرافن معلق روی یک شیار در یک بستر عایق. یک اتصال فلزی برای به حرکت در آوردن صفحه گرافن استفاده شده است.

اکنون برای بدست آوردن هامیلتونی ارتعاشات صفحه گرافن از حل دینامیک سامانه‌ی ریسمان بارگذاری شده شروع می‌کنیم [۶].




شکل ۲: ریسمان مرتعش بارگذاری شده توسط جرم‌های محدود و یکسان.

برای بررسی ارتعاشات یک ریسمان مرتعش، آن را به صورت ریسمان بارگذاری شده در نظر می‌گیریم. ریسمان مرتعش بارگذاری شده، ریسمانی است که n جرم نقطه‌ای به جرم یکسان m همان‌گونه که در شکل (۲) نشان داده می‌شود روی آن قرار داده شده است. انرژی جنبشی و پتانسیل این سامانه‌ی مرتعش طبق روابط زیر به دست می‌آیند:

$$T=\frac{1}{2}m\sum_{j=1}^{n+1}\dot{q}_j^2 \quad , U=\frac{1}{2}k\sum_{j=1}^{n+1}\left(q_{j-1}-q_j\right)^2 \ . \quad (۱)$$

در اینجا $k$ ثابت کشسان ریسمان و $q_j(t)$ مکان ذره‌ی jام روی ریسمان بارگذاری شده است.( $q_0$ و $q_{n+1}$ صفر هستند چون دو انتهای ریسمان ثابت هستند). در نتیجه لاگرانژی این سامانه یک بعدی ریسمان بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\left(m\dot{q}_j^2-k(q_{j-1}-q_j)^2\right) \ . \qquad (۲)$$

اگر n خیلی زیاد شود در نتیجه d، فاصله‌ی میان دو جرم بارگذاری شده خیلی کوچک می‌شود و می‌توان مساله را پیوسته در نظر گرفت. در این شرایط و در مد پیوسته سازی لاگرانژی به صورت زیر در می‌آید:

$$L=\frac{1}{2}\rho\int\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-\omega^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right)dx \ , \qquad (۳)$$

که $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ است. در رابطه‌ی (۳)، $\rho$ چگالی جرمی ریسمان مرتعش بارگذاری شده و $\varphi(\vec{x},t)$ جابه‌جایی ریسمان بارگذاری شده از حالت اولیه است که به صورت میدان در نظر گرفته شده است. سامانه‌ی مورد بررسی فوق، یک سامانه‌ی یک بعدی است. می‌توان با تعمیم رهیافت فوق ارتعاشات یک صفحه‌ی مرتعش را نیز مورد بررسی قرار داد. برای صفحه‌ی گرافن، اگر هر بعد آن را

متناظر با یک سامانه‌ی یک بعدی در نظر بگیریم، لاگرانژی توصیف کننده‌ی ارتعاشات صفحه‌ی گرافن عبارت خواهد شد:

$$L=\frac{1}{2}\sigma\int\left(\dot{\varphi}^2-w^2\left((\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2+(\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2\right)\right)dxdy\,. \qquad (۴)$$

که $q_j(t)=\varphi(\vec{x},t)$ و $w=\sqrt{\frac{\kappa}{\sigma}}$ که $\sigma$ چگالی سطحی و $\kappa$ ثابت کشسان صفحه‌ی گرافن است. در نتیجه هامیلتونی ارتعاشات صفحه گرافن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$H_0=\int\left(\frac{1}{2\sigma}\Pi^2(\vec{x},t)+\frac{\sigma w^2}{2}\left|\nabla\varphi\right|^2\right)dxdy\,, \qquad (۵)$$

است که $\Pi(\vec{x},t)$ چگالی تکانه بندادی همبسته به میدان $\varphi(\vec{x},t)$ است و بصورت $\Pi(\vec{x},t)=\frac{\partial\Im}{\partial\dot{\varphi}}$ تعریف می‌شود که $\Im$ چگالی لاگرانژی سامانه است.

## کوانتیده کردن ارتعاشات صفحه گرافن

$\Pi(\vec{x},t)$ و $\varphi(\vec{x},t)$ را بر حسب یک مجموعه‌ی کامل بسط می‌دهیم:

$$\Pi(\vec{x},t)=\frac{1}{\ell^2}\sum_{\kappa}p_\kappa(t)\phi_\kappa(\vec{x})\,, \qquad (۶)$$

$$\varphi(\vec{x},t)=\sum_{\kappa}q_\kappa(t)\phi_\kappa(\vec{x})\,. \qquad (۷)$$

در بسط‌های فوق $p_\kappa(t)$ و $q_\kappa(t)$ دامنه‌های بسط هستند و توابع مد $\phi_\kappa(\vec{x})$ از حل معادله‌ی موج برای سامانه‌ی مورد نظر به دست می‌آیند. با حل معادله‌ی موج برای صفحه‌ی گرافن، این ویژه توابع به صورت $\phi_\kappa(\vec{x})=\sin(\kappa_x x)\sin(\kappa_y y)$ به دست می‌آیند که $\kappa=(\kappa_x,\kappa_y)=\frac{(\mathrm{n,m})\pi}{\ell}$ برای $n,m=$ ۱و۲و... . با قرار دادن بسط‌های (۶) و (۷) در هامیلتونی رابطه‌ی (۵)، هامیلتونی ارتعاشات صفحه گرافن بصورت زیر حاصل می‌شود[۵]:

$$H_0=\sum_{\kappa}(\frac{p_\kappa^2}{2M}+\frac{1}{2}M\omega_\kappa^2 q_\kappa^2)\,, \qquad (۸)$$

که $M=\sigma\ell^2$ است و $\ell$ طول صفحه گرافن است. به کمک عملگرهای آفرینش و نابودی که در زیر تعریف می‌شوند،

$$b_\kappa=i\sqrt{\frac{1}{2M\hbar\omega_\kappa}}p_\kappa+\sqrt{\frac{M\omega_\kappa}{2\hbar}}q_\kappa\,,$$

$$b_\kappa^+=-i\sqrt{\frac{1}{2M\hbar\omega_\kappa}}p_\kappa+\sqrt{\frac{M\omega_\kappa}{2\hbar}}q_\kappa\,,$$

هامیلتونی کوانتیده شده‌ی ارتعاشات صفحه گرافن حاصل می‌شود:

$$H_0=\sum_{\kappa}\hbar\omega_\kappa(b_\kappa b_\kappa^+ +\frac{1}{2})\,. \qquad (۹)$$

صفحه‌ی گرافن با ولتاژی که از اتصال زیرین با آن حاصل می‌شود برهم کنش می‌کند. در این برهم کنش هامیلتونی ولتاژ متصل به صفحه شبیه به انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن رفتار می‌کند و شکل ریاضی مشابه انرژی پتانسیل خازن را دارا است:

$$H_G=\frac{\varepsilon_0 V(\vec{x},t)^2}{2(\varphi_0+\varphi(\vec{x},t))}\,, \qquad (۱۰)$$

که $\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\,F/m$ و $V(\vec{x},t)$ پتانسیلی است که از اتصال زیرین حاصل می‌شود. $\varphi_0$ دامنه‌ی جابه‌جایی صفحه گرافن در حالتی است که در حالت تعادل قرار دارد. با بسط هامیلتونی $H_G$ تا مرتبه‌ی دوم بر حسب تابع جابه‌جایی $\varphi(\vec{x},t)$، و با استفاده از معادله‌ی (۷) خواهیم داشت :

$$H_G=K_0+\sum_{\kappa}K_\kappa q_\kappa+\frac{1}{2}\sum_{\kappa\kappa'}K_{\kappa\kappa'}q_\kappa q_{\kappa'}\,, \qquad (۱۱)$$

که $K_{\kappa\kappa'}=\frac{\eta V(\vec{x},t)^2\pi^2}{4\varphi_0}$ و $K_\kappa=-2\eta V(\vec{x},t)^2$ و $\eta=\frac{\varepsilon_0\ell^2}{\varphi_0^2\pi^2}$ است.

## فراهم آوری حالت همدوس در صفحه گرافن

در این قسمت به فراهم آوری حالت همدوس در صفحه گرافن می‌پردازیم. هامیلتونی سامانه‌ی کل که شامل صفحه‌ی گرافن و برهم‌کنش آن با اتصال‌های مجاور عبارت است از:

$$H = H_0 + H_G . \quad (۱۲)$$

یک تک مد ارتعاشی را برای این سامانه در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که صفحه گرافن دارای یک مد ارتعاشی است. بنابراین هامیلتونی برای یک مد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H = \frac{p_1^2}{2M} + \frac{1}{2} M\omega_1^2 q_1^2 + K_1 q_1 + \frac{1}{2} K_{11} q_1^2 . \quad (۱۳)$$

به کمک تعاریف زیر:

$$p_1 = \frac{ip_0}{\sqrt{2}} (a^+ e^{i\psi} - a e^{-i\psi}),$$
$$q_1 = \frac{x_0}{\sqrt{2}} (a e^{-i\psi} + a^+ e^{i\psi}),$$

که $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}}$ و $p_0 = \sqrt{M\hbar\omega}$ است، هامیلتونی رابطه (۱۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$H = \hbar\omega a^+ a + \hbar\omega\delta(t)(a e^{-i\psi} + a^+ e^{i\psi}) . \quad (۱۴)$$

در رابطه بالا $\delta(t) = -\sqrt{2}\eta V_0^2 \theta(t) \big/ \sqrt{M\hbar\omega^3}$، $V(t) = V_0\theta(t)$ و $\theta(t)$ تابع پله است. در تصویر برهم‌کنش، هامیلتونی فوق نسبت به هامیلتونی ارتعاشات صفحه گرافن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_I(t) = \hbar\omega\delta(t)(a^+ e^{i(\psi+\omega t)} + a e^{-i(\psi+\omega t)}) . \quad (۱۵)$$

عملگر تحول زمانی برای این سامانه عبارت است از:

$$e^{-iV_I(t)t/\hbar} = e^{-i(ca^+ + c^* a)t/\hbar} = e^{\alpha a^+ - \alpha^* a} ,$$

و $c = \hbar\omega\delta(t) e^{i(\psi+\omega t)}$ است. همان‌گونه که مشخص است عملگر تحول زمانی برای این سامانه شبیه به عملگر جابه‌جایی است که مولد حالت‌های همدوس است. از این رو، اگر صفحه‌ی گرافن در حالت پایه (خلا) باشد، با اثر عملگر تحول فوق حالت صفحه به یک حالت همدوس منجر خواهد شد. بنابراین حالت همدوس مورد نظر در سامانه‌ی صفحه گرافن با عدد مختلط $\alpha$ برچسب زده می‌شود، که این پارامتر توسط برهم‌کنش با اتصال زیرین تعیین خواهد شد:

$$\alpha = -i\omega\delta(t) e^{i(\omega t+\psi)} t . \quad (۱۶)$$

به ازای $\psi = 0$ مقدار $\alpha = -i\omega t\delta(t) e^{i\omega t}$ است.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله ارتعاشات یک صفحه‌ی گرافن در رژیم کوانتومی مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده از مدل محیط‌های پیوسته، هامیلتونی سامانه به‌دست آمد. نشان دادیم که در اثر برهم‌کنش با یک اتصال زیرین اگر صفحه‌ی گرافن در ابتدا در حالت پایه(خلا) قرار داشته باشد به یک حالت همدوس منجر خواهد شد. از این رو این سامانه می‌تواند برای فراهم آوری حالت‌های کوانتومی بر روی صفحه گرافن(یک سامانه‌ی بزرگ مقیاس) مورد استفاده قرار گیرد.

## سپاسگزاری

نویسندگان این مقاله مراتب تشکر خود را از معاونت تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان بیان می‌دارند.

## مراجع

[1] J. Basu, J. K. Basu, and T. K. Bhattacharyya, "The evolution of graphene-based electronic devices," International Journal of Smart and Nano Materials **1**, 201-223 (2010).

[2] J .Atalaya, A. Isacsson, and J. M. Kinaret, "*Continuum elastic modeling of graphene resonators*," Nano letters **8**, 4196-4200 (2008).

[3] V. Singh, S. J. Bosman, B. H. Schneider, Y. M. Blanter, A. Castellanos-Gomez, and G. A. Steele, "Optomechanical coupling between a graphene mechanical resonator and a superconducting microwave cavity," arXiv preprint arXiv:1403.5165 (2014).

[4] Y. Xu, S. Yan, Z. Jin, and Y. Wang, "Quantum-squeezing effects of strained multilayer graphene NEMS," Nanoscale research letters **6**, 1-6 (2011).

[5] A. Voje, J. M. Kinaret, and A. Isacsson, "Generating macroscopic superposition states in nanomechanical graphene resonators," Physical Review B **85**, 205415 (2012).

[6] S. T. Thornton, and J. B. Marion, "*Classical Dynamics of Particles and Systems 5th edn* (Belmont, CA: Brooks/Cole)," (2004).