بیست و یکمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و هفتمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۲۳ تا ۲۵ دی ماه ۱۳۹۳، دانشگاه شهید بهشتی

ناپایداری جینز در پلاسمای غباری با یون ها و الکترون های ابر حرارتی

نرگس افشاری، حسین حکیمی پژوه و محمود رضا روحانی

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهراء (س)، تهران

چکیده – در این مقاله ناپایداری جینز برای ذرات غبار، در یک پلاسمای غباری گرانشی که در آن یون‌ها و الکترون‌ها ابر حرارتی هستند، بررسی شده است. نشان می‌دهیم که افزایش جمعیت ذرات پر انرژی منجر به کاهش نیروی دافعه الکتروستاتیکی میان ذرات غبار می‌شود. در نتیجه پلاسمای غباری ناپایدارتر شده و طول موج آستانه ناپایداری جینز کاهش می‌یابد.

کلید واژه- پلاسمای غباری، تابع توزیع کاپا، ناپایداری جینز.

Jeans instability of a Dusty Plasma with Superthermal Ions and Electrons

Narges Afshari, Hossein Hakimi Pajouh and Mahmoud Reza Rouhani

Department of Physics, Alzahra University, Tehran

Abstract- In this paper the Jeans instability of dust grains in a self-gravitating dusty plasma with a Superthermal ions and electrons is investigated. It is shown that the excess of superthermal particles decreases the repulsive electrostatic force between dust particles. Therefore the dusty plasma becomes more unstable and the Jeans instability started for shorter wavelengths of perturbation.

Keywords: Dusty Plasma, Kappa Distribution, Jeans Instability.

۱- مقدمه

ستاره ها از درون ابرهای بزرگ گازی متولد می‌شوند. این ابرها به دلیل ابعادی که دارند، در اثر نیروی گرانشی خودشان ناپایدار شده و در بعضی نقاط چگالتر می‌شوند. این نقاط بعدا تبدیل به پیش ستاره می‌شوند. این فرایند به نام ناپایداری جینز [۱] شناخته می‌شود.

این ابرهای گازی فقط از مولکولهای هیدروژن خنثی تشکیل نشده است، بلکه می تواند مخلوطی از گاز خنثی، ذرات غبار و پلاسما باشد. در این صورت علاوه بر نیروی گرانشی، نیروهای الکتریکی و مغناطیسی هم بر شرایط پایداری این ابرها تاثیر خواهند داشت.

پلاسماهای نجومی اغلب دارای جمعیت زیادی از ذرات پر انرژی می‌باشند. توزیع سرعت این ذرات را با تابع توزیع کاپا (لورنتسی) [۲-۴] که با اندیس طیفی κ مشخص می‌شود، نشان می‌دهند. در حد $\kappa \to \infty$، این تابع، به تابع توزیع ماکسولی تقلیل پیدا می‌کند.

در این مقاله ناپایداری جینز را در یک پلاسمای غباری، همگن و بینهایت که در آن الکترون‌ها و یون‌ها دارای توزیع کاپا هستند، بررسی می‌کنیم.

۲- معرفی مدل ریاضی

یک پلاسمای غباری سه مؤلفه‌ای را متشکل از ذرات غبار با بار منفی ($q_d < 0$)، یون یک بار مثبت و الکترون، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم بار ذرات غبار ثابت و نیروهای گرانشی و الکتروستاتیکی میان آنها هم مرتبه می‌باشد [۵]. ($Gm_d^2 / q_d^2 \approx O(1)$) دینامیک پلاسمای غباری توسط معادلات زیر توصیف می‌شود:

$$(\partial n_\alpha / \partial t) + \nabla \cdot (n_\alpha v_\alpha) = 0 \tag{۱}$$

$$m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = q_\alpha E_2 + m_\alpha E_1 - (\frac{k_B T_\alpha}{n_\alpha}) \nabla n_\alpha \tag{۲}$$

$$\nabla . E_1 = 4\pi G m_d n_d \tag{۳}$$

$$\nabla . E_2 = 4\pi [e(n_i - n_e) + q_d n_d] \tag{۴}$$

معادلات (۱) تا (۴) به ترتیب معادله پیوستگی و معادله حرکت ذره نوع $\alpha = i,e,d$، معادله پواسون گرانشی و پواسون الکتروستاتیکی می‌باشد. $E_1 = -\nabla \psi$ میدان گرانشی ذرات غبار، $E_2 = -\nabla \phi$ میدان الکتروستاتیکی و n_α، v_α، m_α، T_α، q_α به ترتیب چگالی، سرعت سیالی، جرم، دما و بار ذره نوع $\alpha = i,e,d$ است. e اندازه بار الکترون و یون، k_B ثابت بولتزمن و G ثابت گرانش می‌باشد. در ادامه فرض می‌کنیم که همه تغییرات فقط در راستای x باشد.

تابع توزیع کاپا برای ذره نوع $\alpha = i,e$ عبارت است از:

$$f_\kappa(v_\alpha) = \frac{n_{\alpha 0}}{(\pi \kappa \theta_\alpha^2)^{3/2}} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa - \frac{1}{2})} \left(1 + \frac{v_\alpha^2 + (2q_\alpha \phi / m_\alpha)}{\kappa \theta_\alpha^2}\right)^{-(\kappa+1)} \tag{۵}$$

$\theta_\alpha = \left(\frac{\kappa - (3/2)}{\kappa} \frac{2k_B T_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2}$ و $n_{\alpha 0}$ چگالی تعادلی و سرعت حرارتی تعمیم یافته ذره نوع $\alpha = i,e$ است. Γ، تابع گاما می‌باشد. برای حقیقی بودن θ_α، باید $\kappa > 3/2$ باشد. در تابع توزیع ذرات به دلیل جرم بسیار کم یون و الکترون نسبت به غبار، از انرژی گرانشی آنها در برابر انرژی الکتروستاتیکی و جنبشی صرفنظر کردیم. چگالی ذره نوع $\alpha = i,e$ برابر است با:

$$\begin{aligned} n_\alpha &= \int f_\kappa(v_\alpha)\, d^3 v_\alpha \\ &= n_{\alpha 0}\left(1 + \frac{2q_\alpha \phi}{k_B T_\alpha (2\kappa - 3)}\right)^{-\kappa + \frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{۶}$$

در حالت کلی اندیس طیفی κ برای یون‌ها و الکترون‌ها برابر نمی‌باشد، ولی در اینجا فرض می‌کنیم که ذرات پلاسما در تعادل ترمودینامیکی قرار دارند، به عبارت دیگر $\kappa_i = \kappa_e = \kappa$ و $T_e = T_i$ می‌باشد. در ادامه سیستم را از تعادل خارج کرده و با حل معادلات سیالی خطی شده، رابطه پاشندگی را به دست می‌آوریم. در حالت تعادل چگالی تعادلی ذره نوع $\alpha = i,e,d$ ثابت و میدان الکتریکی صفر می‌باشد. از اینرو در حالت تعادل شرط شبه خنثی بودن ($n_{i0} = n_{e0} + z_d n_{d0}$) برقرار است. z_d تعداد الکترون‌های روی سطح غبار می‌باشد. تمام کمیت‌ها را به صورت $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1$ ($\mathrm{A}_1 << \mathrm{A}_0$) می‌نویسیم که در آن اندیس صفر (یک) مقدار تعادلی (اختلالی) کمیت A را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن مرتبه اول کمیت‌های اختلالی، معادلات (۳)، (۴) و (۶) را خطی می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = 4\pi G m_d n_{d1} \tag{۷}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = -4\pi [e(n_{i1} - n_{e1}) + q_d n_{d1}] \tag{۸}$$

$$n_{\alpha 1} = -n_{\alpha 0}\left(\frac{2\kappa - 1}{2\kappa - 3}\right)\frac{q_\alpha \phi_1}{k_B T_\alpha} \quad , \quad \alpha = i,e \tag{۹}$$

با فرض متناسب بودن کمیت‌های اختلالی با $e^{ikx - i\omega t}$،

(k عدد موج و ω فرکانس نوسان کمیت‌های اختلالی است) از معادلات (۸) و (۹) به دست می‌آوریم:

$$\phi_1 = \frac{4\pi q_d n_{d1}}{\left[k^2 + (1/\lambda_D^2)\left(\frac{2\kappa - 1}{2\kappa - 3}\right)\right]} \qquad (۱۰)$$

$\lambda_{D\kappa}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\lambda_{D\kappa} = \lambda_D \left(\frac{2\kappa - 3}{2\kappa - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱)، $\lambda_{D\kappa}$ طول دبای در پلاسمای غباری است که در آن یون‌ها و الکترون‌ها دارای توزیع سرعت کاپا هستند و λ_D طول دبای در پلاسمای غباری با توزیع ماکسولی برای یون و الکترون می باشد:

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{1}{\lambda_{Di}^2} + \frac{1}{\lambda_{De}^2} \qquad (۱۲)$$

$\lambda_{D\alpha} = (\frac{k_B T_\alpha}{4\pi n_{\alpha 0} e^2})^{\frac{1}{2}}$ طول دبای ذره نوع $\alpha = i, e$ است.

معادله پیوستگی و حرکت غبار خطی شده عبارت است از:

$$\frac{\partial n_{d1}}{\partial t} + n_{d0}\frac{\partial v_{d1}}{\partial x} = 0 \qquad (۱۳)$$

$$\frac{\partial v_{d1}}{\partial t} = -\frac{q_d}{m_d}\frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \qquad (۱۴)$$

در نوشتن معادله (۱۴) فرض شده است که ذرات غبار سرد می‌باشند یعنی $T_d = 0$ است. از معادله (۱۴) نسبت به مکان مشتق گرفته و با توجه به معادلات (۷) و (۱۳) به دست می‌آوریم:

$$\omega^2 = \frac{q_d n_{d0} k^2}{m_d}\phi_1 - \omega_{Jd}^2 \qquad (۱۵)$$

که در آن $\omega_{Jd} = \sqrt{4\pi G m_d n_{d0}}$، فرکانس جینز برای ذرات غبار است. ϕ_1 را از معادله (۱۰) در معادله (۱۵) قرار داده و رابطه پاشندگی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\omega^2 = \frac{k^2 \omega_{pd}^2 \lambda_D^2}{\left[k^2 \lambda_D^2 + (\frac{2\kappa - 1}{2\kappa - 3})\right]} - \omega_{Jd}^2 \qquad (۱۶)$$

که در آن $\omega_{pd} = \sqrt{4\pi n_{d0} q_d^2 / m_d}$ فرکانس پلاسمایی برای ذره غبار می‌باشد.

اگر $\kappa \to \infty$، آنگاه رابطه پاشندگی بصورت زیر در می‌آید:

$$\omega^2 = \frac{k^2 \omega_{pd}^2 \lambda_D^2}{k^2 \lambda_D^2 + 1} - \omega_{Jd}^2 \qquad (۱۷)$$

که همان رابطه پاشندگی برای پلاسمای غباری با توزیع ماکسولی برای یون و الکترون می‌باشد [۵].

۲-۱- بررسی رابطه پاشندگی

ضریب ω_{pd}^2 در عبارت (۱۷) همواره کوچکتر از یک است.

اگر $\omega_{pd} < \omega_{Jd}$، آنگاه همواره $\omega^2 < 0$ می‌باشد، یعنی ناپایداری داریم.

اگر $\omega_{pd} > \omega_{Jd}$ آنگاه $\omega^2(k_0 \lambda_D) = 0$ که :

$$k_0 \lambda_D = \sqrt{\frac{[(2\kappa - 1)/(2\kappa - 3)]\omega_{Jd}^2}{\omega_{pd}^2 - \omega_{Jd}^2}} \qquad (۱۸)$$

اگر $k_0 = 2\pi / \lambda_0$، دو حالت وجود دارد:

۱) $\lambda < \lambda_0$: در این حالت $\omega^2 > 0$ و پاسخ سیستم به اختلال وارد شده به صورت انتشار موج غبار- صوت (DA) با فرکانس ω می‌باشد و حالت تعادل پایدار است.

۲) $\lambda > \lambda_0$: در این صورت $\omega^2 < 0$ و سیستم ناپایدار می‌باشد. منظور ما از ناپایداری این است که در اثر اختلال وارد شده، سیستم از حالت تعادل خارج شده و در خودش فرو می‌ریزد.

۳- حل عددی

پارامترهای پلاسما را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$n_{i0} = 10^6\ cm^{-3}$, $n_{e0} = 7608 cm^{-3}$

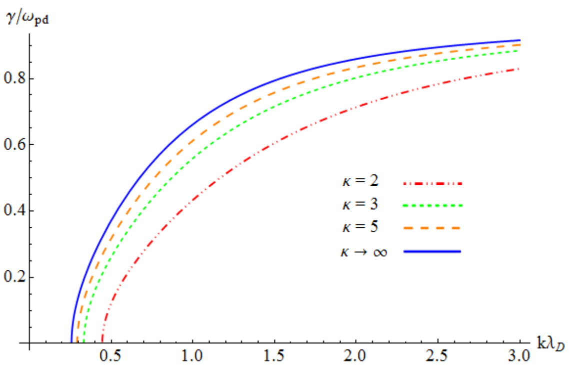
$n_{d0} = 976 cm^{-3}$, $q_{d0} = 4.8 \times 10^{-7}\ esu$

$T_i = T_e = 3 \times 10^3\ K$, $m_i = 6.67 \times 10^{-24}\ gr$

$m_d = 4.63 \times 10^{-4}\ gr$, $a = 3 \times 10^{-2}\ cm$

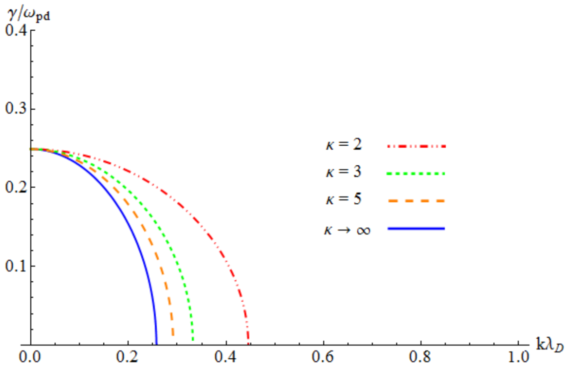
که در آن a شعاع ذره غبار است. در این پلاسما $\omega_{pd} > \omega_{Jd}$ می‌باشد.

در حالت تعادل پایدار، نمودار فرکانس نوسان موج DA بر حسب عدد موج برای κهای مختلف و حالت ماکسولی ($\kappa \to \infty$)، در شکل ۱رسم شده است.



شکل ۱: نمودار فرکانس نوسان موج غبار- صوت بر حسب عدد موج

نمودار نرخ رشد در حالت تعادل ناپایدار در شکل ۲ رسم شده است.



شکل ۲: نمودار نرخ رشد ناپایداری بر حسب عدد موج

در نمودارها، فرکانس نوسان و نرخ رشد به فرکانس پلاسمای غباری، و عدد موج به طول دبای ماکسولی نرمالیزه شده است. برای داشتن تعادلی پایدار باید نیروی دافعه الکتروستاتیکی میان ذرات غبار بر نیروی گرانشی میان آنها غلبه داشته باشد. هر چه نیروی دافعه الکتروستاتیکی قوی‌تر باشد، فرکانس نوسان موج DA بیشتر است. به همین نحو با افزایش نیروی جاذبه گرانشی، نرخ رشد ناپایداری افزایش می‌یابد. با توجه به معادله (۱۸) می‌توان گفت که با کاهش κ (افزایش جمعیت ذرات پر انرژی)، مقدار λ_0 نیز کاهش یافته و سیستم ناپایدارتر می‌شود. افزایش ناپایداری می‌تواند ناشی از افزایش نیروی گرانشی و یا کاهش نیروی الکتروستاتیکی باشد.

در اینجا ما فرض کردیم که مقدار چگالی اختلالی ذرات غبار (n_{d1})، برای هر دو نوع توزیع کاپا و ماکسولی یکسان می‌باشد. از اینرو با توجه به معادله (۷)، مقدار پتانسیل گرانشی اختلالی و در نتیجه نیروی جاذبه گرانشی به وجود آمده، برای هر دو نوع توزیع کاپا و ماکسولی، یکسان است.

با توجه به یکسان بودن نیروی جاذبه گرانشی میان ذرات غبار این‌طور می‌توان نتیجه گرفت که کاهش نیروی دافعه الکتروستاتیکی عامل اصلی در افزایش نرخ رشد ناپایداری در توزیع کاپا نسبت به توزیع ماکسولی می باشد.

با توجه به رابطه (۱۱)، کوچک بودن $\lambda_{D\kappa}$ نسبت به λ_D، به این معناست که پتانسیل الکتروستاتیکی، کمتر به درون ناحیه داخلی پلاسما نفوذ کرده و در نتیجه نیروی الکتروستاتیکی در داخل پلاسما ضعیف‌تر می‌باشد.

با توجه به تعریف طول دبای [۶،۷] ، می‌توان گفت در پلاسماهای با دمای متناهی، اندازه طول دبای به انرژی حرارتی و به عبارتی به سرعت حرارتی یون‌ها و الکترون‌ها بستگی دارد. هر چه انرژی حرارتی ذرات بیشتر باشد، طول دبای بزرگتر می‌شود.

سرعت حرارتی ذرات در پلاسمای غباری با توزیع ماکسولی عبارت است از:

$$v_{th,\alpha} = \sqrt{\frac{2k_B T_\alpha}{m_\alpha}} \qquad (۱۹)$$

با توجه به تعریف سرعت حرارتی تعمیم یافته θ_α و رابطه (۱۹) می‌توان گفت:

$$\theta_\alpha = \sqrt{\frac{\kappa-(3/2)}{\kappa}}\, v_{th,\alpha} \qquad (۲۰)$$

در نتیجه $\theta_\alpha < v_{th,\alpha}$ می‌باشد. از آنجایی که تعداد ذرات پرانرژی (یعنی ذراتی که سرعت آنها از سرعت حرارتی شان بسیار بزرگتر می‌باشد) در پلاسماهای با توزیع کاپا برای ذرات، نسبت به پلاسماهای با تابع توزیع ماکسولی، بیشتر است، در نتیجه طول دبای کوچکتر بوده و نیروی الکتروستاتیکی در فواصل کوتاهتری نسبت به پلاسمای ماکسولی احساس می‌شود.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله پایداری گرانشی یک پلاسمای نجومی همگن و بینهایت را مورد بررسی قرار دادیم. یون‌ها و الکترون‌ها را ابر حرارتی در نظر گرفته و تابع توزیع کاپا را برای آنها نوشتیم. نشان دادیم که برای داشتن تعادلی پایدار، طول موج اختلال وارد شده باید کوچکتر از یک طول موج آستانه (λ_0) باشد. همچنین افزایش جمعیت ذرات پر انرژی منجر به کاهش نیروی دافعه الکتروستاتیکی شده و میزان ناپایداری پلاسما را تشدید می‌کند.

مراجع

[1] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1990), p. 342.

[2] V.M. Vasyliunas, J. Geophys. Res. 73, 2839 (1968).

[3] G. Livadiotis, D. J. McComas, *Understanding Kappa Distributions: A Toolbox for Space Science and Astrophysics*, Space Sci. Rev., 175, 183–214 (2013)

[4] V. Pierrard, M. Lazar, S. Poedts, R. Schlickeiser, *Modeling space plasma dynamics with anisotropic Kappa distributions*, Astrophys. Space Sci.Proc. 33 (2012) 97-107 (2012)

[5] B. P. Pandey, K. Avinash and C. B. Dwivedi, *Jeans instability of a Dusty plasma*, Phys. Rev. E 49, 5601 (1994)

[6] Francis F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, vol 1, Plenum Press, New York, 1984

[7] J. A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, Springer-Verlag New York, 2004