بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

تولید حالت‌های درهم‌تنیده‌ی غیرخطی در حضور میدان کوانتیده با استفاده از رهیافت میدان کلاسیک قوی

روح‌اله نظری دانشمند و محمد کاظم توسلی

گروه اتمی-مولکولی، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد، یزد

چکیده - در این مقاله ابتدا روش مناسبی برای تولید یک رده‌ی خاص از حالت‌های درهم‌تنیده‌ی غیرخطی متناظر با گروه $SU(1,1)$ از نوع "گیلمور-پرلوموف" پیشنهاد شده است. بدین منظور، برهم‌کنش یک رشته‌ی باریک از اتم‌های دوترازه با یک میدان کوانتیده‌ی تک‌مد در حضور یک میدان خارجی کلاسیک قوی در نظر گرفته شده است. نشان داده شده است که کنش عملگر یکانی تحول زمانی با استفاده از هامیلتونی برهم‌کنش بالا در یک کاواک با کیفیت بالا روی حالت اولیه‌ی سامانه‌ای که به طور مناسبی انتخاب شده باشد، بسته به اینکه چه تعداد اتم دوترازه درون کاواک باشند، منجر به تولید حالت‌های درهم‌تنیده‌ی غیرخطی چندتایی می شود.

کلید واژه- حالت درهم‌تنیده، مدل جینز-کامینگز، حالت همدوس، حالت همدوس غیرخطی .

Generation of Nonlinear Entangled States in a Quantized Field by Strong-Field Approach

R. N. Daneshmand and M. K. Tavassoly

Atomic and Molecular Group, Faculty of Physics, Yazd University, Yazd

Abstract- In this paper a scheme for generation of a particular class of Gilmore–Perelomov type of SU (1,1) entangled states, which may be established as nonlinear entangled states is proposed. To achieve this purpose, the interaction of a system of N two-level atoms in a cavity of high quality factor with a single-mode quantized field in the presence of a strong classical field is investigated. It is shown that, by the action of the time evolution operator concerning the interaction Hamiltonian of the above system on the appropriate initial atom-field state, depending on how many two-level atoms are in the cavity, multipartite nonlinear entangled states can be generated.

Keywords: Entangled states, Jaynes-Cummings model, Coherent states, Nonlinear coherent states.

۱. مقدمه

دو یا چند سامانه‌ی کوانتومی در صورتی درهم‌تنیده هستند که نتوان خصوصیات فیزیکی آن‌ها را توسط ضرب مستقیم عملگرهای چگالی آن‌ها بیان کرد. کاواک الکترودینامیک کوانتومی(QED) که در آن اتم‌ها با یک میدان کوانتیده‌ی الکترومغناطیسی برهم‌کنش می‌کنند، ابزار مناسبی برای بررسی خصوصیات بنیادی فیزیک کوانتومی محسوب می‌شود. در مطالعه‌ی حاضر تلاش ما بر این است که با اضافه‌کردن یک میدان کلاسیک قوی به سامانه‌ای که شامل یک باریکه‌ی نازک از اتم‌های دو-ترازه در حضور میدان کوانتیده‌ی تک‌مد درون یک کاواک با کیفیت بالا است، حالت‌های درهم‌تنیده‌ی غیرخطی چندتایی را تولید کنیم. در واقع میدان رانشی همدوس (کلاسیک) قوی، از آن‌جایی که آزادی مناسبی برای تعیین نامیزانی بسامد و شدت میدان به ما می‌دهد، انعطاف بسیاری در تولید حالت درهم‌تنیده ایجاد خواهد کرد. با استفاده از روش ذکرشده‌ی بالا، می‌توان به تولید حالت‌های درهم‌تنیده‌ای پرداخت که شامل حالت-های همدوس استاندارد و حالت‌های اتمی باشند [۱].

حالت‌های همدوس به عنوان ویژه‌حالت‌های عملگر نابودی $\hat{a}$ معرفی می‌شوند[۲]، یعنی $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ که α یک مقدار مختلط است. این حالت‌ها هم‌چنین با کنش عملگر جابجایی $\widehat{D}(\alpha) = exp(\alpha\hat{a}^{\dagger} - \alpha^{*}\hat{a})$ روی خلأ میدان تولید می‌شوند. حالت‌های همدوس غیرخطی با رابطه‌ی $|\alpha, f\rangle = N_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}f(n)!}|n\rangle$، یک رده‌ی بسیار مهم از حالت‌های همدوس تعمیم‌یافته هستند. این حالت‌ها از رابطه‌ی ویژه‌مقداری $\hat{A}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ که $\hat{A} = \hat{a}f(\hat{n})$ است، پیروی می‌کنند. $f(\hat{n})$ یک تابع غیرخطی از عملگر عددی $\hat{n} = \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ است [۳]. حالت‌های همدوس غیرخطی علاوه بر حفظ خواص بسیاری از حالت‌های همدوس استاندارد همچون جایگزیدگی توزیع فضای فاز حول دامنه‌ی مختلط، خصوصیات غیرکلاسیکی متعددی نظیر پادگروهگی، آمار زیرپواسونی یا چلاندگی [۴] را از خود بروز می‌دهند که حالت‌های همدوس استاندارد قادر به نشان‌دادن آن‌ها نیستند. حالت‌های همدوس فوتون-افزوده‌ی [۵] یکی از نمونه‌های حالت‌های همدوس غیرخطی هستند. به‌دلیل این‌که $[\hat{A}, \hat{A}^{\dagger}] =$ $(\hat{n}+1)f^2(n+1) - \hat{n}f^2(n)$، نمی‌توان عملگر جابجایی یکانی را به همان صورتی که برای تولید حالت-های همدوس استاندارد به‌کار برده شد، تعریف کرد. برای غلبه بر این مشکل از یک تابع $f(n)$ ویژه استفاده می کنیم. در مطالعه‌ی حاضر این تابع ویژه، متناظر با پتانسیل مثلثاتی $V(x) = U_0 tan^2(bx)$ که در مراجع [۶] و [۷] معرفی شده، انتخاب شده است. در این‌جا U_0 شدت و b برد تابع است.

تابع غیرخطی متناظر با این پتانسیل عبارت است از [۶]:

$$f_1(n) = \sqrt{\frac{\hbar b^2}{2\mu\Omega}(n + 2\lambda - 1)} \qquad (۱)$$

که Ω فرکانس میدان و μ جرم ذره است. λ متناسب با قدرت پتانسیل است که با رابطه‌ی $\lambda(\lambda+1) = \frac{2\mu U_0}{\hbar^2 b^2}$ تعریف می شود. اندیس 1 به دلیل استفاده از جبر لی گروه $SU(1,1)$ است. با استفاده از تابع غیرخطی در رابطه-ی (۱)، عملگر جابجایی به صورت $[\hat{A}_1, \hat{A}_1^{\dagger}] = \frac{2\mu\Omega}{\hbar b^2}(\hat{n} + \lambda\hat{I})$ درخواهدآمد. با تعریف عملگرهای $\widehat{K}_1^{+} = \sqrt{n + 2\lambda - 1}\hat{a}^{\dagger}$ و $\widehat{K}_1^{-} = \hat{a}\sqrt{n + 2\lambda - 1}$ و $\widehat{K}_1^{0} = \hat{n} + \lambda\hat{I}$ و در نتیجه $[\widehat{K}_1^{0}, \widehat{K}_1^{\pm}] = \pm\widehat{K}_1^{\pm}$، شرایط جبر لی به طور طبیعی برآورده شده است. با استفاده از رهیافت "گیلمور-پرلوموف" برای تولید حالت‌های همدوس غیرخطی گروه $SU(1,1)$ خواهیم داشت[۷]:

$$\begin{aligned}\widehat{D}_{f_1}(\alpha)|0\rangle &= exp(\xi\widehat{K}_1^{+} - \xi^{*}\widehat{K}_1^{-})|0\rangle \\ &= exp(\xi\widehat{K}_1^{+})(1 - |\xi|^2)exp(\xi^{*}\widehat{K}_1^{-}) \\ &= (1 - |\xi|^2)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{n!\Gamma(2\lambda)}}|n\rangle\end{aligned} \qquad (۲)$$

که در این‌جا از روابط $\xi = \sqrt{\frac{\hbar b^2}{2\mu\Omega}}\alpha$ و $\zeta = \frac{\xi}{|\xi|}tanh\xi$ استفاده کرده‌ایم. با تعریف $\eta_1(\alpha) = \sqrt{\frac{2\mu\Omega}{\hbar b^2}}\zeta$ حالت به‌دست‌آمده در رابطه‌ی (۲) به صورت زیر درخواهدآمد [۷]:

$$|\eta_1(\alpha), f_1\rangle = \left(1 - \frac{\hbar b^2}{2\mu\Omega}\left|\eta_1(\alpha)\right|^2\right)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta_1(\alpha)[f_1(n)]!}{\sqrt{n!}}|n\rangle \qquad (۳)$$

که در این‌جا $[f_1(n)]! = f_1(n)\, f_1(n-1) \ldots f_1(1)$ است.

می‌توان با استفاده از توابع غیرخطی متناظر با پتانسیل-های دیگر، عملگرهای آفرینش و نابودی غیرخطی را ایجاد کرد که برای جبر لی گروه $SU(2)$ کاربرد داشته باشند و متناظر با آن، حالت‌های همدوس غیرخطی $SU(2)$ را تولید کرد.

۲. تولید حالت‌های همدوس غیرخطی درهم‌تنیده

برهم‌کنش یک اتم دوترازه با یک میدان الکترومغناطیسی تک‌مد به کمک مدل جینز-کامینگز یکی از ساده‌ترین سامانه‌های اپتیک کوانتومی است. ما در این‌جا برهم‌کنش یک میدان تک‌مد (با بسامد ω)در کاواک با کیفیت بالا با یک رشته‌ی باریک از N اتم دو-ترازه در حضور یک میدان خارجی (با بسامد ω_L) را بررسی می‌کنیم. هامیلتونی مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_j^{\dagger}\hat{\sigma}_j + \hbar\omega\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar\Omega \sum_{j=1}^{N}\left(e^{-i\omega_L t}\hat{\sigma}_j^{\dagger} + e^{i\omega_L t}\hat{\sigma}_j\right) + \hbar g \sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j^{\dagger}\hat{A} + \hat{\sigma}_j\hat{A}^{\dagger}\right) \quad (۴)$$

که $\hat{\sigma}_j = |g_j\rangle\langle e_j|$ و $\hat{\sigma}_j^{\dagger} = |e_j\rangle\langle g_j|$ به‌ترتیب عملگرهای پایین‌آورنده و بالابرنده‌ی حالت‌های اتمی هستند که بین تراز پایه‌ی اتم jام ($|g_j\rangle$) و برانگیخته‌ی اتم jام ($|e_j\rangle$) عمل می‌کنند. $\hat{A}$ و $\hat{A}^{\dagger}$ همانطور که گفته شد عملگرهای آفرینش و نابودی غیرخطی میدان هستند. g و Ω به-ترتیب ثابت‌های جفت‌شدگی بین حالت‌های اتمی با میدان کوانتیده و میدان کلاسیک هستند. در حالت ایده‌آل در حوزه برهم‌کنش قوی، رابطه‌ی $g > \kappa$ را خواهیم داشت، یعنی اتلاف سامانه را ناچیز در نظر گرفته‌ایم. در چارچوب چرخش‌یافته‌ی میدان مرجع نسبت به بسامد میدان کلاسیک، خواهیم داشت:

$$\hat{H}^L = \hbar\Delta \sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_j^{\dagger}\hat{\sigma}_j + \hbar\delta\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar\Omega \sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j^{\dagger} + \hat{\sigma}_j\right) + \hbar g \sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j^{\dagger}\hat{A} + \hat{\sigma}_j\hat{A}^{\dagger}\right) \quad (۵)$$

که در این‌جا $\Delta = \omega_0 - \omega_L$ و $\delta = \omega - \omega_L$ هستند. برای سادگی، $\Delta = 0$ را در نظر می‌گیریم و درنتیجه خواهیم داشت: $\hat{H}^L = \hat{H}_0^L + \hat{H}_{int}^L$، که:

$$\hat{H}_0^L = \hbar\delta\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar\Omega \sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j^{\dagger} + \hat{\sigma}_j\right) \quad (۶)$$

$$\hat{H}_{int}^L = \hbar g \sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j^{\dagger}\hat{A} + \hat{\sigma}_j\hat{A}^{\dagger}\right) \quad (۷)$$

در تصویر برهم‌کنش، هامیلتونی به صورت زیر درخواهدآمد:

$$\hat{V}_{int}(t) = \frac{\hbar g}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(|+_j\rangle\langle +_j| - |-_j\rangle\langle -_j| + e^{2i\Omega t}|+_j\rangle\langle -_j| - e^{-2i\Omega t}|-_j\rangle\langle +_j|\right)\hat{A}e^{-i\delta t} + H.c. \quad (۸)$$

که حالت‌های پوشیده‌ی $|\pm_j\rangle = \left(|g_j\rangle \pm |e_j\rangle\right) / \sqrt{2}$ ویژه‌توابع عملگر $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_j^{\dagger} + \hat{\sigma}_j$ هستند. در حالتی که میدان کلاسیک، قوی باشد ($\Omega \gg \{g, \delta\}$) و تقریب موج چرخان را اعمال کنیم، هامیلتونی مؤثر در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر خواهد شد:

$$\hat{V}_{eff}(t) = \frac{\hbar g}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(|+_j\rangle\langle +_j| - |-_j\rangle\langle -_j|\right)\left(\hat{A}e^{-i\delta t} + \hat{A}^{\dagger}e^{i\delta t}\right) = \frac{\hbar g}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{\sigma}_j^{\dagger} + \hat{\sigma}_j\right)\left(\hat{A}e^{-i\delta t} + \hat{A}^{\dagger}e^{i\delta t}\right). \quad (۹)$$

هامیلتونی به‌دست‌آمده ترکیبی از دو هامیلتونی جینز-کامینگز و آنتی-جینز-کامینگز است که در اولی بقای انرژی لحاظ شده و در دومی در نظر گرفته نشده است. حالت اولیه‌ی سامانه را مجموعه‌ای از یک اتم دوترازه ($N = 1$) در حالت پایه و میدان در حالت خلأ، در نظر می‌گیریم به صورتی که حالت اولیه سامانه به شکل $|g\rangle|0\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)|0\rangle / \sqrt{2}$ است. با استفاده از هامیلتونی مؤثر در تصویر برهم‌کنش در رابطه‌ی (۹)، حالت تحول‌یافته‌ی سامانه‌ی میدان-تک‌اتم بعد از زمان t نتیجه‌ی کنش عملگر تحول زمانی $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{V}_{eff}(\tau)\, d\tau}$ روی حالت اولیه است که به صورت زیر درخواهدآمد:

$$|\psi(t)\rangle_I = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle|\eta_1(\alpha), f_1\rangle + |-\rangle|\eta_1(-\alpha), f_1\rangle\right) \quad (۱۰)$$

که $\alpha = -g\left(e^{i\delta t} - 1\right)/2\delta$. علیرغم عدم جابجایی $\hat{V}_{eff}(t)$ در رابطه‌ی (۹) در زمان‌های متفاوت، هنوز می-توان از شکل انتگرالی بالا برای محاسبه $\hat{U}(t)$ استفاده کرد [۱و۸]. همان‌طور که گفته شد $|\eta_1(\alpha), f_1\rangle$ حالت همدوس غیرخطی میدان است. می‌بینیم که حالت (۱۰) یک حالت درهم‌تنیده‌ی شامل حالت اتمی و حالت

همدوس غیرخطی میدان است. حالت درهم‌تنیده‌ی مزوسکوپیک-میکروسکوپیک دوتایی (۱۰) معمولا به عنوان گربه‌ی شرودینگر شناخته می‌شود. حاصل بازنویسی این رابطه در تصویر شرودینگر به صورت زیر

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle_S = \tfrac{1}{2}[|g\rangle\big(e^{-i\Omega t}\big|\eta_1(\alpha)e^{-i\omega t},f\big\rangle &\\ +\ e^{+i\Omega t}\big|-\eta_1(\alpha)e^{-i\omega t},f\big\rangle\big) &\\ +\ e^{-i\omega_0 t}|e\rangle\big(e^{-i\Omega t}\big|\eta_1(\alpha)e^{-i\omega t},f\big\rangle &\\ -\ e^{+i\Omega t}\big|-\eta_1(\alpha)e^{-i\omega t},f\big\rangle\big)]\end{aligned} \tag{۱۱}$$

است که نشان می‌دهد، اگر اندازه‌گیری روی اتم به مشاهده‌ی حالت اتمی $\langle g|$ ($\langle e|$) بیانجامد، حالت میدان نیز یک برهم‌نهی زوج (فرد) از حالت همدوس غیرخطی میدان خواهد بود. اگر در سامانه‌ی موردنظر، دو اتم دوترازه در نظر بگیریم، ($N = 2$) به نحوی که حالت اولیه‌ی سامانه به صورت $\langle 0| \otimes \langle g_1, g_2|$ باشد، حالت تحول یافته‌ی میدان-دواتم در تصویر برهم‌کنش به صورت

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle_I = \frac{1}{2}(|\varphi_1\rangle|2\eta_1(\alpha),f\rangle &\\ +|\varphi_2\rangle|-2\eta_1(\alpha),f\rangle + (|\varphi_3\rangle + |\varphi_4\rangle)|0\rangle)\end{aligned} \tag{۱۲}$$

درخواهدآمد، که $\langle\varphi_i|$ ها ویژه‌حالت‌های عملگر ($S_x = \sum_{j=1}^{2}(\sigma_j^\dagger + \sigma_j$ با ویژه‌مقادیر $\gamma_{1,2} = \pm 2$ و$\gamma_{3,4} = 0$ هستند. می‌بینیم که حالت به‌دست‌آمده در (۱۲)، نسبت به حالت ارائه شده در رابطه‌ی (۱۱)، یک حالت درهم‌تنیده‌ی غیرخطی جدید میکروسکوپیک-مزوسکوپیک است. اندازه‌گیری دو اتم در حالت $\langle g_1, g_2|$، در تصویر شرودینگر منجر به مشاهده‌ی حالت

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle_S = \mathcal{N}(e^{-2i\Omega t}\big|2\eta_1(\alpha)e^{-i\omega t},f\big\rangle &\\ +e^{2i\Omega t}\big|-2\eta_1(\alpha)e^{-i\omega t},f\big\rangle + 2|0\rangle)\end{aligned} \tag{۱۳}$$

برای میدان می‌شود که یک برهم‌نهی سه‌تایی از حالت‌های غیرخطی مزوسکوپیک میدان است. در این‌جا $\mathcal{N}$ به عنوان ضریب بهنجارش در نظر گرفته شده است. بر خلاف رابطه‌ی (۱۱)، حالت به‌دست‌آمده در مقایسه با گربه‌ی شرودینگر نه تنها حاوی دو حالت "مرده" و "زنده" است، بلکه دارای حالت "غایب" نیز می‌باشد. هامیلتونی مؤثر در رابطه‌ی (۹) به ما اجازه می‌دهد با افزایش تعداد اتم‌های دوترازه در سامانه، حالت‌های مزوسکوپیک درهم‌تنیده‌ی میدان-Nاتم پیچیده‌تری تولید کنیم.

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از رهیافت میدان کلاسیک قوی و با استفاده از تابع غیرخطی متناظر با یک پتانسیل فیزیکی خاص به تولید حالت‌های درهم‌تنیده‌ی همدوس غیرخطی (از نوع "گیلمور-پرلوموف")، متناظر با گروه جبری $SU(1,1)$ پرداختیم. سامانه‌ای که درون کاواک QED در نظر گرفتیم شامل برهم‌کنش یک باریکه از N اتم دوترازه با یک میدان الکترومغناطیسی تک‌مد کوانتیده در حضور میدان کلاسیک قوی است. حالت‌های به‌دست‌آمده به نوعی درهم‌تنیدگی بین حالت‌های مزوسکوپیک میدان و میکروسکوپیک اتم را نشان می-دهند. درموردی که تنها یک اتم دوترازه در میدان کاواک باشد حالت به دست‌آمده برای میدان، یک گربه‌ی شرودینگر زوج یا فرد تشکیل‌شده از حالت‌های همدوس غیرخطی است. در صورتی که تعداد اتم‌ها را به عدد دو برسانیم، حالت به‌دست‌آمده برای میدان، یک گربه‌ی شرودینگر پیچیده‌تر که شامل ترکیبی از حالت‌های گربه-ی "مرده"، "زنده" و "غایب" است، خواهد بود. در واقع با افزایش تعداد اتم‌ها، حالت‌های درهم‌تنیده‌ی چندتایی پیچیده‌تری تولید می‌شود.

مراجع

[1] Solano, E, Agarwal, G. S., Walther, *H., Strong-Driving-Assisted Multipartite Entanglement in Cavity QED,* **Phys. Rev. Lett.**, 90 (2003) 027903.

[2] Sudarshan, *E. C. G., Equivalence of Semiclassical and Quantum Mechanical Descriptions of Statistical Light Beams,* **Phys. Rev. Lett.**, 10 (1963) 277.

[3] de Matos Filho, R. L., Vogel, W., *Engineering the Hamiltonian of a Trapped Atom,* **Phys. Rev. A.**, 58 (1998) R1661.

[4] Slusher, R. E., Hollberg, *Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity*, **Phys. Rev. Lett**., 55 **(**1985) 2409.

[5] Agarwal, G. S., Tara, K., *Nonclassical Properties of States Generated by the Excitations on a Coherent State*, **Phys. Rev. A**, 43 (1991) 492.

[6] Man'ko, V. I., Marmo, G., Sudarshan, Zaccaria, *f-Oscillators and Nonlinear Coherent States*, **Phys. Scr.**, 55 (1997) 528.

[7] Miry, S. R., Tavassoly, M. K., *Generation of a Class of SU(1,1) Coherent States of the Gilmore-Perelomov Type and a Class of SU(2) Coherent States and Their Superposition,* **Phys. Scr.**, 85 **(**2012) 035404.

[8] Scully, Marlan O. Suhail Zubairy., *Quantum Optics*, P.48, Cambridge University Press, 1997.