بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

محاسبه در هم تنیدگی دو کیوبیت در حال برهم کنش با میدان همدوس با معیارهای تطابق و نگاتیویته در مدل جینز - کامینگز

مژگان باتوانی و مهدی میرزایی

اراک، سردشت، دانشگاه اراک، دانشکده علوم، گروه فیزیک

چکیده – در این مقاله میزان در هم تنیدگی دو کیوبیت کاملا جدا از هم که هر کدام با میدان همدوس در حال برهم کنش اند نسبت به زمان محاسبه می شود. برای محاسبه از معیارهای تطابق و نگاتیویته استفاده می شود، هامیلتونی سیستم نیز در مدل جینز- کامینگز نوشته می شود.

کلید واژه- در هم تنیدگی، کیوبیت، تطابق، نگاتیویته، مدل جینز- کامینگز

Measuring qubit entanglement using Concurrence and Negativity in Jaynes-Cummings model

Batavani Mozhgan, Mirzaee Mehdi

Arak, university of Arak

Abstract- In this paper we investigate entanglement dynamics of two isolated atoms, each in its own Jaynes-Cummings Cavity. We use the concurrence and the negativity for measuring entanglement.

Keywords: Entanglement, Qubit, Concurrence, Negativity, Jaynes-Cummings model

۱- مقدمه

در هم تنیدگی کوانتومی نقش مهمی را در محاسبات کوانتومی و اطلاعات کوانتومی بازی می کند . در سالهای اخیر مدل جینز – کامینگز مورد توجه بسیاری بوده است. این مدل بر همکنش یک اتم دو ترازه با یک مد کوانتیده شده را توصیف می کند. از طرف دیگر بخاطر اینکه سیستم کوانتومی با محیط برهم کنش می کند درهم تنیدگی دو اتم نسبت به زمان کاهش می یابد تا صفر شود، این پدیده مرگ ناگهانی درهم تنیدگی نامیده می شود.

۲- ماتریس چگالی سیستم

در این جا مدل جینز-کامینگز شامل دو اتم دو ترازه را در نظر می گیریم، هر اتم در حال برهم کنش با مد کاواکش است و دارای یک حالت پایه $|g>$ و یک حالت برانگیخته $|e>$ می باشد. هر کیوبیت (اتم-میدان) کاملا جدا و ایزوله از کیوبیت دیگر است. هامیلتونی جینز-کامینگز برای سیستم به صورت زیر نوشته می شود.

$$H=\omega\sigma_z^A+\omega\sigma_z^B+$$
$$g(a^+\sigma_-^A+a\,\sigma_+^A)+g(b^+\sigma_-^B+b\,\sigma_+^B)$$
$$+\upsilon a^+a+\upsilon b^+b$$

(۱)

که ω فرکانس گذار اتمی، υ فرکانس میدان کاواک است در اینجا حالت تشدیدی را در نظر میگیریم $(\omega=\upsilon)$. g ثابت کوپلاژ اتم- میدان و $a^+(b^+)$ و a(b) به ترتیب عملگرهای خلق و فنای میدان هستند. σ_+ عملگرهای اسپینی اند و اندیس های A و B مربوط به کاواک های A و B می باشند. در هامیلتونی (۱) از تقریب موج چرخان استفاده شده است. فرض می کنیم که حالت اولیه اتمی سیستم به صورت

$$|\Psi_{atom}(0)>=\cos\theta\,|eg>\ +\sin\theta\,|ge>$$

(۲)

است. و میدان نیز در t=0 در حالت همدوس باشد یعنی

$$|\psi_{field}(0)>=\ |\alpha>=exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n>$$

(۳)

تحت این شرایط حالت اولیه سیستم به شکل زیر نوشته می شود.

$$|\Psi(0)>=(\cos\theta\,|eg>\ +\sin\theta\,|ge>)\otimes|\alpha\alpha>$$

(۴)

برای بدست آوردن تابع موج در زمان t>0 می توانیم معادله شرودینگر را با هامیلتونی (۱) حل کنیم، که با اینکار تابع موج در زمان t>0 بصورت زیر بدست می آید.

$$|\psi(t)>=\sum_{n,m=0}^{\infty}\ \{a_{n,m}(t)|ee\ n,m>$$
$$+b_{n,m}(t)\,|eg\ n,m>\ +c_{n,m}(t)\,|ge\ n,m>$$
$$+d_{n,m}(t)\,|gg\ n,m>\}$$

(۵)

که ضرایب a ، b، c و d به صورت زیر داده می شوند.

$$a_{n,m}(t)=-ie^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}}\left\{\begin{array}{c}\frac{\alpha}{\sqrt{m+1}}\cos\theta\cos\left(gt\sqrt{n+1}\right)\sin\left(gt\sqrt{m+1}\right)+\\ \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}\sin\theta\sin\left(gt\sqrt{n+1}\right)\cos\left(gt\sqrt{m+1}\right)\end{array}\right\}$$

$$b_{n,m}(t)=e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}}\left\{\begin{array}{c}\cos\theta\cos\left(gt\sqrt{n+1}\right)\cos\left(gt\sqrt{m}\right)-\\ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n+1}}\sin\theta\sin\left(gt\sqrt{n+1}\right)\sin\left(gt\sqrt{m}\right)\end{array}\right\},$$

$$c_{n,m}(t)=e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}}\left\{\begin{array}{c}\sin\theta\cos\left(gt\sqrt{n}\right)\cos\left(gt\sqrt{m+1}\right)-\\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+1}}\cos\theta\sin\left(gt\sqrt{m+1}\right)\sin\left(gt\sqrt{n}\right)\end{array}\right\},$$

$$d_{n,m}(t)=-ie^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}}\left\{\begin{array}{c}\frac{\sqrt{n}}{\alpha}\cos\theta\cos\left(gt\sqrt{m}\right)\sin\left(gt\sqrt{n}\right)-\\ \frac{\sqrt{m}}{\alpha}\sin\theta\sin\left(gt\sqrt{m}\right)\cos\left(gt\sqrt{n}\right)\end{array}\right\}$$

(6)

اگر حالت اولیه میدان را به جای حالت همدوس، حالت گربه ای در نظر بگیریم یعنی

$$|c>=\frac{1}{\sqrt{[1+exp(-2\alpha^2)\cos\phi]}}\left(|\alpha>\ +|-\alpha>\right)$$

(۷)

در اینصورت تابع موج سیستم در $t>0$ بصورت زیر میشود

$$|\Psi(0)\rangle = (\cos\theta\,|eg\rangle + \sin\theta\,|ge\rangle)\otimes|cc\rangle \qquad (۸)$$

و ضرایب a ، b، c و d به شکل زیر تغییر می کنند.

$$a_{n,m}(t) = -ie^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!\,m!}}$$
$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\alpha}{\sqrt{m+1}}\cos\theta\cos\left(gt\sqrt{n+1}\right)\sin\left(gt\sqrt{m+1}\right)x_{-}y_{-} + \\ \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}\sin\theta\sin\left(gt\sqrt{n+1}\right)\cos\left(gt\sqrt{m+1}\right)x_{-}y_{-}\end{array}\right\}$$

$$b_{n,m}(t) = e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\cos\theta\cos\left(gt\sqrt{n+1}\right)\cos\left(gt\sqrt{m}\right)x_n x_m - \\ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n+1}}\sin\theta\sin\left(gt\sqrt{n+1}\right)\sin\left(gt\sqrt{m}\right)y_n y_m\end{array}\right\}$$

$$c_{n,m}(t) = e^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\sin\theta\cos\left(gt\sqrt{n}\right)\cos\left(gt\sqrt{m+1}\right)x_n x_m - \\ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+1}}\cos\theta\sin\left(gt\sqrt{m+1}\right)\sin\left(gt\sqrt{n}\right)y_n y_m\end{array}\right\}$$

$$d_{n,m}(t) = -ie^{-|\alpha|^2}\frac{\alpha^{n+m}}{\sqrt{n!m!}}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\sqrt{n}}{\alpha}\cos\theta\cos\left(gt\sqrt{m}\right)\sin\left(gt\sqrt{n}\right)y_n x_m - \\ \frac{\sqrt{m}}{\alpha}\sin\theta\sin\left(gt\sqrt{m}\right)\cos\left(gt\sqrt{n}\right)x_n y_m\end{array}\right\}$$

(۹)

که

$$x_{n(m)} = 1 + (-1)^{n(m)},$$

$$y_{n(m)} = 1 - (-1)^{n(m)}$$

تمام اطلاعات سیستم در ماتریس چگالی نهفته است که به شکل $\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ برای هر یک از توابع موج (۴) و (۸) با ضرایب (۶) و (۹) به دست می آید. البته بخاطر اینکه ما علاقمند به محاسبه میزان در هم تنیدگی اتم ها هستیم روی میدان ردگیری میکنیم تا ماتریس چگالی کاهش یافته اتمی بدست آید.

۳- معیار تطابق

معیار تطابق توسط ووترز معرفی شده است که به شکل زیر تعریف می شود.

$$C = max\left(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right) \qquad (۱۰)$$

که λ_i ها ویژه مقادیر ماتریس

$$\tilde{\rho} = \rho(\sigma_y\otimes\sigma_y)\rho^*(\sigma_y\otimes\sigma_y) \qquad (۱۱)$$

هستند که در رابطه (۱۰) باید به ترتیب از بزرگ به کوچک نوشته شوند. در (۱۱) ρ ماتریس چگالی کاهش یافته اتمی و ρ^* مزدوج مختلط ماتریس ρ است.و σ هم ماتریس پائولی می باشد. با استفاده از تابع موج (۵) معادله (۱۱) به رابطه زیر تبدیل می شود

$$C = \max\Big(0, \sum_{n,m}\Big(\left|a_{n,m}(t)\right|^2\left|d_{n,m}(t)\right|^2 - \left(a_{n,m}(t)\,d_{n,m}(t)\,c^*_{n,m}(t)\,b^*_{n,m}\right) - \left(c_{n,m}(t)\,b_{n,m}(t)\,a^*_{n,m}(t)\,d^*_{n,m}(t)\right) + \left|b_{n,m}(t)\right|^2\left|c_{n,m}(t)\right|^2\Big)$$

(۱۲)

که $n(m)$ تعداد فوتونها برای میدان همدوس و گربه ای است که در رابطه (۳) هم داده شده و ضرایب a ، b، c و d در رابطه (۶) و (۹) داده شده اند. با استفاده از این رابطه نمودار تطابق را هم برای تابع موج اولیه (۴) و هم برای تابع موج اولیه (۸) بر حسب gt در شکل (۱) رسم می کنیم. همانطور که مشاهده می شود بر اساس معیار تطابق درهم تنیدگی نسبت به زمان به سرعت کاهش می یابد اما از مقایسه دو نمودار (۱. الف) و (۲. ب) آشکاراست که زمانیکه میدان در $t=0$ در حالت گربه ای است سیستم در بازه های زمانی طولانی در هم تنیده است و سرعت میرایی در هم تنیدگی سیستم نسبت به زمانی که میدان اولیه، همدوس است کندتر است بعبارت دیگر وقتی که از میدان گربه ای بعنوان میدان برهمکنشی استفاده می شود جداپذیری سیستم هم کاهش می یابد. که البته بخاطر اینکه حالت گربه ای بیشتر خاصیت کوانتومی دارد و حالت همدوس بیشتر شبه کلاسیک است این نتیجه منطقی است.

۴- معیار نگاتیویته

معیار پرز-هرودوکی برای جداپذیری به معیاری برای محاسبه در هم تنیدگی منجر می شود که معیار نگاتیویته نام دارد. این معیار بطور خلاصه به صورت زیر نوشته می شود.

$$N(\rho) = 2\, max(0\,, -\lambda_{min}) \tag{13}$$

که λ_{min} کمترین ویژه مقدار ماتریس ترانهاد جزئی ماتریس چگالی ρ^{T_1} است. می توان با استفاده از ترانهاد جزئی ماتریس چگالی حاصل از تابع موج (۵) رابطه (۱۳) را به شکل زیر نوشت.

$$N(\rho) = \sum_{n,m} \left(a_{n,m}(t)\, d_{n,m}(t) + b_{n,m}(t)\, c_{n,m}(t) \right)$$

(۱۴)

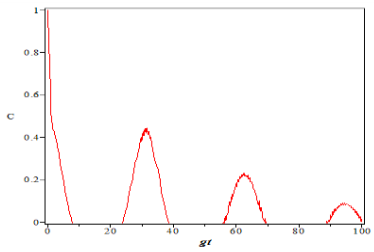
شکل (۲) نمودار تغییرات معیار نگاتیویته (۱۴) را با ضرایب (۶) و (۹) برحسب gt نشان می دهد. همانطور که مشخص است در هر دو نمودار هم تنیدگی نسبت به زمان در حال کاهش است. بر اساس معیار نگاتیویته جداپذیری با گذشت زمان افزایش می یابد. از مقایسه نمودار معیار تطابق شکل (۱) و نمودار معیار نگاتیویته شکل (۲) بنظر می رسد معیار تطابق معیار دقیقتری نسبت به معیار نگاتیویته است هر چند که هر دو رفتار یکسانی را از در هم تنیدگی سیستم نشان می دهند بطوریکه مقادیر بیشینه هر دو در gt های یکسانی رخ می دهد.

۵- نتیجه‌گیری

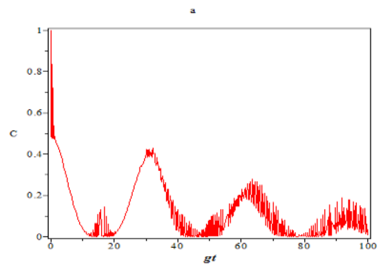
در هم تنیدگی کیوبیت با گذشت زمان کاهش می یابد تا اینکه سیستم کاملا جدا پذیر می شود می توان با انتخاب میدان گربه ای نسبت به میدان همدوس درهم تنیدگی سیستم را در بازه های زمانی بیشتری حفظ کرد معیار تطابق در مقایسه با معیار نگاتیویته معیار مناسب تری برای محاسبه درهم تنیدگی دو کیوبیت است.

مراجع

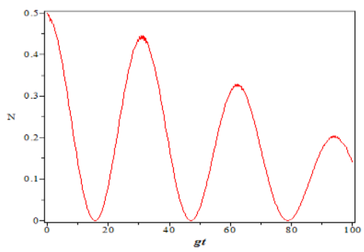
[1] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, H. Zbinden, Quantum cryptography. Rev. Mod. Phys.
74, 145 (2002).
[2] L. Xiao, G.L. Long, F.G. Deng, J.W. Pan, Phys. Rev. A 69,
052307 (2004).



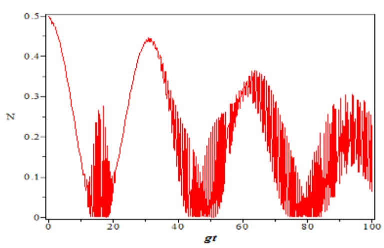
شکل (۱. الف) معیار تطابق که در آن میدان اولیه حالت همدوس می باشد



شکل (۱. ب) معیار تطابق که در آن میدان اولیه حالت گربه ای می باشد



شکل (۲. الف) معیار نگاتیویته که در آن میدان اولیه حالت همدوس می باشد



شکل (۲. ب) معیار نگاتیویته که در آن میدان اولیه حالت گربه ای می باشد

[3] F.G. Deng, X.H. Li, C.Y. Li, P. Zhou, H.Y. Zhou, Phys. Rev. A 72, 044301 (2005).
[4] E.T. Jaynes and F.W. Cummings, Proc. IEEE 51, 89 (1963).
[5] T. Yu, J. H. Eberly, Optics Communications. 264, 2 (2006).
[6] L. Mazzola, S. Maniscalo, J. Piilo, K-A. Suominen, B.M. Garraway, Physical Review A,
79 (4). 042302. ISSN 1050-2947 (2009).
[7] X-F. Qian, J. H. Eberly, Physics Letters A. 376(45):2931 (2012).
[8] M. Y¨ona¸c, J. H. Eberly, arXiv:1211.5654v1 [quant-ph] (2012).
[9] G.F. Zhang, X.C. Xie, The European Physical Journal D. 60, 2, pp 423-427 (2010)
[10] W.K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 80, 2245 (1998).
[11] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Phys. Lett. A .(223 1 (1996