



بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران  
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران  
۸ تا ۱۰ بهمن ماه ۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز



## محاسبه معادله دینامیکی فازی حاصل از معادلات نرخ لانگ- کابایاشی

### در لیزر نیمه رسانا با کاواک عمودی

اکبر جعفری، خسرو مبهوتی، عذرا کیاست فر ورقیه چودار

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، ارومیه

چکیده - در این مقاله با در نظر گرفتن یک زمان پایه معادلات لانگ-کابایاشی را باز نویسی کرده و با وارد کردن جمله گاوسی اختلال به عنوان نوفه و با بی بعد کردن این معادلات، معادله درجه سوم فازی میدان لیزری متغیر بر حسب زمان محاسبه شده است. این معادله تغییرات فاز میدان لیزر بر حسب تغییرات زمان را مشخص می کند. در محاسبه این معادله، فاز و شدت میدان الکتربیکی متغیر دینامیکی اصلی در نظر گرفته شده است. نشان داده شده است که دینامیک شدت خروجی بطور دقیقتری توسط معادله فازی در مقایسه با معادلات نرخ لیزری تعیین می شود.

کلید واژه- معادله فازی، کاواک عمودی، لیزر نیمه رسانا.

## Calculation of dynamical phase equation from Lang- Kobayashi rate equations for vertical cavity semiconductor laser

Jafari, Akbar; Mabhouti, Khosro ; Kiasatfar, Ozra; Chodar, Rogayeh

Physics Department, Faculty of Sciences, Urmia University, Urmia

Abstract- In this paper by using lang kobayashi equations in the dimensionless format and adding gussian perturbation as a noise term, the third order phase equation for the laser filed is calculated. In this calculation, the phase and the intensity of the electrical filed has taken as main dynamical variable. It has been shown that the dynamics of the output intensity can be determined more accurately by the phase equation with compared to rate equations.

Keywords: phase equation, vertical cavity, semiconductor laser

۱- مقدمه

دینامیک غیرخطی لیزرهای نیمه رسانا از نقطه نظر کاربردی در علوم مهندسی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. از جمله می توان به کاربرد آنها در زمینه ارتباطات با فیبرهای نوری، ذخیره سازی داده های نوری، انتقال سیگنالها، به هم پیوستن کامپیوترها و توسعه ی زیرشبکه ها اشاره نمود [۲۱]. لیزرهای نیمه هادی نسبت به پس خوراند های نوری بسیار حساس می باشند [۳]. در واقع، مقدار کمی از پسخوراند نوری برای تولید ناپایداریهای بی نظم کافی بوده و به تبع منجر به ایجاد شدت بالاتر و فرکانس های اختلالی می شود [۴]. لیزرهای نیمه رسانا بر حسب کاواک به دو مدل عمودی و افقی تقسیم می شوند [۵ و ۶]. مدهای لیزر نیمه رسانا با کاواک عمودی، غالباً به صورت تک مد طولی است که ناشی از کاواک بسیار کوتاه آن می باشد [۴]. اما ممکن است دارای مدهای مختلف عرضی بالا برای حالت های با پمپاژ خیلی قوی نیز باشد [۷]. در این لیزرها برای پس خوراند های پایین معقول است، که شدت میدان الکتریکی و فاز میدان الکتریکی را متغیر دینامیکی اصلی فرض می کنیم. از نقطه نظر کاربرد، مقادیر فاز میدان لیزر مشخص کننده توزیع شدت میدان می باشد که در محیط آزمایشگاهی تعیین این مقادیر مشکل است. همچنین فرآیند همزمان سازی سیستم های جفت شده لیزری هنگامی به صورت کامل برقرار می باشد که مقادیر مناسب فازی برای هر دو سیستم در نظر گرفته شده باشد [۸]. در این مقاله با استفاده از معادلات لانگ-کابایاشی در حضور ضریب نوفه و با بی بعد کردن این معادلات، معادله فازی میدان لیزری با در نظر گرفتن پارامترهای پمپاژ ( $P$ )، فاکتور پهن شدگی ( $\alpha$ ) و شدت پس خوراند ( $k$ ) محاسبه شده است. پاسخ مرتبه اول این معادله فازی را بدست آورده و با استفاده روش حل عددی، نمودار پاسخ مرتبه اول حاصل از معادله فازی رسم گردیده است. نهایتاً نتایج حاصله، با نمودار تحول زمانی مستخرج از معادلات لانگ-کابایاشی مقایسه گردیده است.

۲- معادلات نرخ لانگ کابایاشی:

معادله نرخ توصیف کننده دینامیک لیزر نیمه رسانا با کاواک عمودی و معادله مربوط به تحول زمانی وارونی انبوهی را می توان بصورت زیر نوشت [۶]:

$$\dot{E} = \frac{1+i\alpha}{2} [\Delta n - 1] E + K e^{-i\varphi} E(t-\tau) + \sqrt{R} \tilde{\xi} \quad (1)$$

$$T \dot{\Delta n} = -\Delta n + p - \Delta n |E|^2 \quad (2)$$

در معادلات فوق  $E$  نشانگر میدان الکتریکی،  $\Delta n$  تغییرات چگالی

حامل بار نسبت به آستانه  $\Delta n = \frac{n-1}{n_{th}-1}$  و

$$R = \left[ \frac{n}{n_{th}} \right]^2 R_{sp}$$

ضریب نوفه و  $\tilde{\xi}$  جمله گاوسی نوفه می باشد

که در آن  $n_{th}$  چگالی حامل در حالت آستانه می باشد. مقادیر مربوط به  $\tilde{\xi}$  نهایتاً در بازه ی  $[0,1]$  می باشد، همچنین  $\alpha$  فاکتور پهن شدگی و  $K$  شدت پس خوراند است [۹]. در این مقاله مقادیر پارامترهای  $\tau = 302.5$ ،  $T = 30.833$  و  $\tilde{\xi} = 1$  ثابت فرض شده و برای شدت پس خوراند،  $K = 0.25$  را در نظر می گیریم [۶].

۳- محاسبه معادله فازی:

در این قسمت برای بررسی اثرات جمله ی اختلال بر دینامیک پایداری لیزر، معادلات (۲) و (۳) را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$\frac{dE}{ds} = \left( \frac{1+i\alpha}{2} \right) (\Delta n - 1) E + K e^{-i\varphi} E(s-\theta) + \sqrt{R} \tilde{\xi} \quad (3)$$

$$T \frac{dn}{ds} = -\Delta n + P - \Delta n |E|^2 \quad (4)$$

که با در نظر گرفتن مقیاس زمانی طول عمر فوتون  $\tau_p$  در

$$\theta \equiv \frac{\tau}{\tau_p} \quad \text{و} \quad s \equiv \frac{t}{\tau_p}$$

معادلات فوق پارامترهای زمانی به صورت می باشند.  $\tau$  و  $\tau_p$  به ترتیب نشان دهنده طول عمر حامل فوتون و میزان تأخیر زمانی در کاواک خارجی می باشند. چگالی حامل ها و میدان الکتریکی را نیز به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$n = \frac{X\omega}{\alpha} \quad (5)$$

$$E = \sqrt{p} \left( 1 + \frac{e}{\alpha} \right) \exp \left[ i \left( \phi - \frac{\varphi}{\theta} s \right) \right] \quad (6)$$

بعد از قرار دادن روابط (۵) و (۶) در معادلات (۳) و (۴)، معادله ۳ را به

صورت زیر می نویسیم:

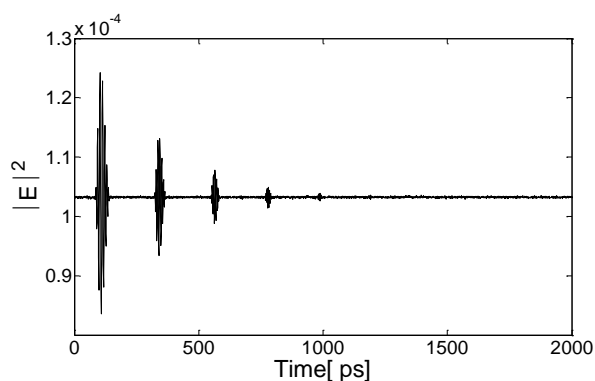
$$(7)$$

$$\omega \sqrt{p} \frac{d}{ds} \left[ \exp \left[ i \left( \phi - \frac{\varphi s}{\theta \omega} \right) \right] \right] = \frac{1+i\alpha}{2} \left( \frac{\chi \omega \beta}{\alpha} - \beta - 1 \right) \times$$

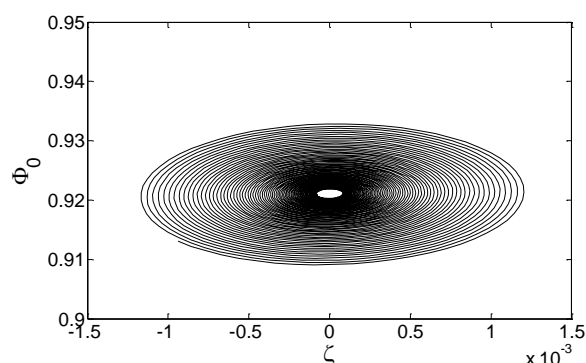
$$\sqrt{p} \left( 1 + \frac{e}{\alpha} \right) \exp \left[ i \left( \phi - \frac{\varphi s}{\theta \omega} \right) \right] + K e^{-i\varphi} \sqrt{p} \left( 1 + \frac{e}{\alpha} \right) \times$$

$$\exp \left[ i \left( \phi \left( \frac{S}{\omega} - \theta \right) - \frac{\varphi}{\theta} \times \left( \frac{S}{\omega} - \theta \right) \right) \right] + \sqrt{\frac{R}{p}} \tilde{\xi}' \left( \frac{S}{\omega} \right)$$

حاصل از معادله فازی را دارای اهمیت می‌کند، توانایی این معادله در تعیین دقیق دینامیک نهایی شدت خروجی لیزر می‌باشد. به بیان دیگر منحنی تحول زمانی تنها دینامیک لیزر را در محدوده زمانی انتخاب شده نشان می‌دهد حال آنکه نمودار فازی میدان لیزری دینامیک نهایی میدان لیزری را بدون وابستگی به محدوده زمانی انتخاب شده مشخص می‌کند. در شکل ۱، تحول زمانی دینامیک شدت خروجی برای پارامترهای  $P = 0.42$ ،  $\alpha = 3.3$  و  $R = 2 \times 10^{-4}$  رسم شده است. در توصیف تحولات دینامیکی نمودار، همانطور که مشاهده می‌شود مدهای لیزری ابتدا به صورت پالسی شروع به نوسان می‌کنند و مابین هر پالس نوسانات آشوبناک ناشی از وجود نوفه نیز وجود دارد. اما، با گذشت زمان از شدت این پالسها کاسته شده تا اینکه نهایتاً دینامیک پالسی به طور کامل حذف گردد. در شکل ۲ نمودار فازی مدهای نوسانی نشان داده شده در شکل ۱ با استفاده از معادله ۱۲ رسم شده است.



شکل ۱: نمودار تحول زمانی شدت خروجی لیزر،  $|E|^2$  بر حسب پارامترهای  $P = 0.42$ ،  $\alpha = 3.3$  و  $R = 2 \times 10^{-4}$  برای بازه زمانی ۲۰۰۰ پیکو ثانیه.



شکل ۲: نمودار فاز شدت خروجی لیزر،  $|E|^2$ ،  $P = 0.42$ ،  $\alpha = 3.3$  و  $R = 2 \times 10^{-4}$ .

در رابطه‌ی بالا  $\beta = \frac{1}{n_{th} - 1}$ ،  $\zeta' = \frac{1 + 2P}{2P}$  و  $S \equiv \omega S$  می‌باشد. با جداسازی قسمت های حقیقی و موهومی معادله ۷ داریم:

$$\frac{d\phi}{dS} = \frac{1}{2} \beta \chi + \Delta - \frac{\alpha}{2\omega} (\beta + 1) \quad (8)$$

$$\frac{de}{dS} = \frac{1}{2} \beta \chi + \Lambda \cos[\phi(S - \Theta) - \phi(S)] - \frac{\alpha}{2\omega} (\beta + 3) + \frac{\alpha}{\omega} \sqrt{\frac{R}{P}} \tilde{\zeta}(S) \cos\left[\phi(S) - \frac{\phi S}{\theta}\right] \quad (9)$$

که در آن  $\Theta \equiv \omega \theta$  و  $\Lambda = \frac{K\alpha}{\omega}$ ،  $\Delta = \frac{\varphi}{\omega \theta}$  می‌باشد. معادلات ۸ و ۹ به ترتیب تغییرات فاز و دامنه میدان را نشان می‌دهند. با استفاده از معادلات ۷، ۸ و ۹ معادله فازی لیزر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\ddot{\phi} + \dot{\phi}(\beta \omega \zeta') - \beta^2 \frac{(\phi - \Delta)}{2} + \beta^2 \left(\frac{e}{4\omega}\right) (\beta + 1) - \frac{\beta^2}{2} \Lambda \cos[\phi(S - \Theta) - \phi(S)] - \frac{\beta^2 \alpha \sqrt{R}}{2\omega \sqrt{P}} \tilde{\zeta}(S) \cos\left[\phi(S) - \frac{\phi S}{\theta}\right] = 0 \quad (10)$$

معادله فازی بدست آمده می‌تواند بر حسب مراتب مختلفی از  $\omega S$  پاسخهای متعددی به صورت زیر داشته باشد که در آن  $\zeta \equiv \omega S$  در نظر گرفته شده است:

$$\Phi(S, \zeta, \omega) = \Phi_0(S, \zeta) + \omega \Phi_1(S, \zeta) + \dots \quad (11)$$

باحل معادله‌ی فازی، پاسخ مرتبه صفرام به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Phi_0 = \Delta S + R + B(\zeta) + A(\zeta) \cos[S + v(\zeta)] \quad (12)$$

که در آن ضرایب  $A$ ،  $B$ ،  $v$  و  $R$  به صورت مجموعه‌ای از توابع متغیر بر حسب  $\zeta$  می‌باشند.

#### ۴- حل عددی پاسخ حاصله از معادله فازی:

در معادله ۱۲ ضرایب  $A$ ،  $B$ ،  $v$  و  $R$  در واقع مجموعه‌ای از توابع مثلثاتی بر حسب سینوس، کسینوس و مراتب مختلفی از توابع بسط است، که محاسبه دقیق پاسخ حاصله به صورت تحلیلی مشکل می‌باشد. از این رو در این بخش به حل عددی این معادله می‌پردازیم. معادلات جفت شده ۱ و ۲ مشخص کننده مقادیر میدان و وارونی انبوهی می‌باشند. همچنین این معادلات توانایی توصیف تحول زمانی و دینامیک شدت خروجی لیزر را دارا می‌باشند. اما آنچه که پاسخ

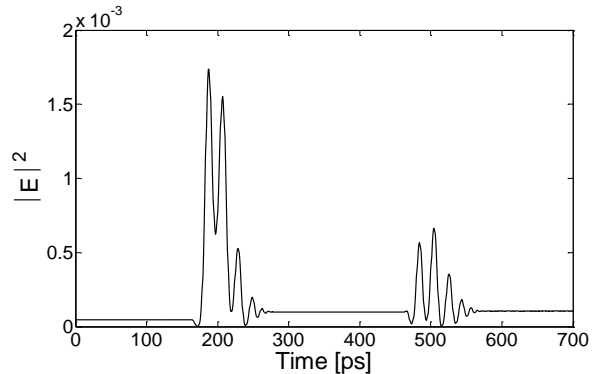
۵- نتیجه گیری:

در تعیین دینامیک شدت خروجی لیزر به طور معمول از نمودارهای تحول زمانی شدت خروجی لیزر استفاده می‌گردد. این نمودارها به خوبی می‌توانند تحولاتی دینامیکی شدت خروجی لیزر را برای بازه زمانی انتخاب شده مشخص نمایند. اما همانطور که در از نمودارهای شکل ۱ و ۳ مشاهده شد، نمودار تحول زمانی می‌تواند با توجه به بازه زمانی انتخاب شده در رسم آن نتایج متفاوتی را ارائه دهد. در واقع دقت نتایج حاصله از نمودار تحول زمانی وابسته به بازه زمانی انتخاب شده برای رسم آن می‌باشد. از این رو در این مقاله با پایه قرار دادن معادلات نرخ لانگ-کابایاشی معادله فازی میدان بدست آورده شد، و نشان داده شد که نتایج حاصل از پاسخ مرتبه اول این معادله وابسته به بازه ی زمانی انتخاب شده نمی‌باشند. به بیان دیگر منحنی تحول زمانی تنها دینامیک لیزر را در محدوده زمانی انتخاب شده نشان می‌دهد حال آنکه نمودار فازی میدان لیزری دینامیک نهایی میدان لیزری را بدون وابستگی به محدوده زمانی انتخاب شده مشخص می‌کند.

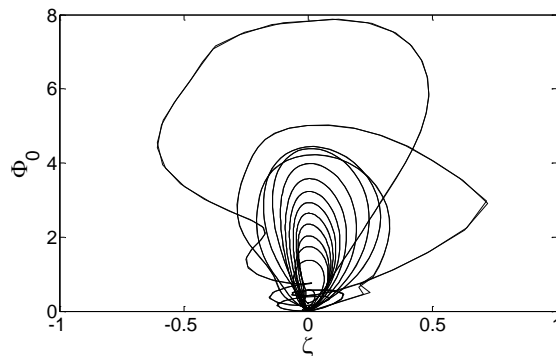
مراجع

[1] S. Banerjee, L. Rondoni, S. Mukhopadhyay, AP. Misra, *Optics Communications* **284**, 2278 (2011).  
 [2] J.M. Buldu, J. Garcia-Ojalvo, M.C. Torrent, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **41**, 164 (2005).  
 [3] S. Tang, JM. Liu, *IEEE Journal of Quantum Electronics* **37**, 329 (2011).  
 [4] G.R. Gray, T. Ryan, G. P. Agrawal, E. C. Gage, *Proc. SPIE* **45**, 2039 (1993).  
 [5] K. Green, *Physical Review E* **79**, 036210 (2009).  
 [6] A. Torcini, S. Barland, G. Giacomelli, F. Marin, *Physical Review A* **67**, 063801 (2006).  
 [7] G. Giacomelli, F. Marin, M. Romanelli, *Physical Review A* **67**, 053809 (2003).  
 [8] M. Bulinski, M. L. Pascu, I. R. Andrei, *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials*, Vol. 6, No. 1, 77 – 86 (2004).  
 [9] S. Barland, P. Spinicelli, G. Giacomelli, F. Marin, *IEEE J. Quantum Electron* **41**, 1235 (2005).

این نمودار به خوبی وجود تعدد مدهای نوسانی را نشان می‌دهد. همچنین، مشخص می‌کند که شدت خروجی لیزری نهایتاً به سمت مقدار کمینه ای میل میکند (مرکز دایره). در واقع شکل ۲ تصویری نهایی از نوع دینامیک شدت خروجی لیزر بدون وابسته گی زمانی ارائه میکند. برای درک بهتر این موضوع، نمودار تحول زمانی شدت خروجی لیزر را برای همان مقادیر استفاده شده در شکل (۱) اما برای بازه زمانی کوتاهی مجدداً رسم می‌کنیم (شکل ۳).



شکل ۳: نمودار تحول زمانی شدت خروجی لیزر،  $|E|^2$ ، بر حسب پارامترهای  $P = 0.42$ ،  $\alpha = 3.3$  و  $R = 2 \times 10^{-4}$  برای بازه زمانی ۷۰۰ پیکو ثانیه.



شکل ۴ نمودار فاز شدت خروجی لیزر،  $|E|^2$ ، برای دینامیک پالسی.

همانطور که مشاهده می‌شود دینامیک خروجی را که این نمودار نشان می‌دهد، دینامیک پالسی است. با مقایسه این نمودار با نمودار شکل ۱ می‌توان مشاهده کرد که در واقع دینامیک خروجی لیزر تنها به صورت پالسی نخواهد بود. برای درک بهتر از نمودار شکل ۲، می‌توان نمودار فازی مربوط به دینامیک پالسی را برای مقادیر دلخواهی رسم نمود (شکل ۴) و آن را با شکل ۲ مقایسه کرد.

همانطور که از این شکل مشاهده می‌شود، مسیر تحول فازی مربوط به میدان خروجی لیزری ترکیبی از چندین مسیر بسته می‌باشد که فاز میدان به صورت منظمی از مقادیر بزرگتر به سمت مقادیر کوچکتر تغییر می‌یابد و مجدداً این فرآیند تکرار می‌شود.