



بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران  
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران  
۸ تا ۱۰ بهمن ماه ۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز



## مهندسی حالت‌های کوانتومی میدان اتمی یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین در برهم‌کنش با یک کاواک اپتیکی

علی دلفی<sup>۱</sup>، محمد حسین نادری<sup>۲</sup> و محمود سلطان‌الکتابی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>مرکز ملی علوم و فنون لیزر ایرن، تهران

<sup>۲</sup>گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه اصفهان

چکیده - در این مقاله به بررسی نظری سامانه‌ای متشکل از یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین که در داخل شبکه‌ی اپتیکی یک کاواک به دام افتاده است می‌پردازیم. نشان داده می‌شود که چگونه با استفاده از اثر برهم‌کنش غیر خطی اتم-اتم می‌توان حالت‌افت و خیزهای کوانتومی میدان اتمی (مد بوگولیوبوف) را دستکاری و کنترل کرد و به حالت‌های چلانده دست یافت.

کلیدواژه-چگالیده بوز-اینشتین، شبکه اپتیکی، حالت چلانده

## Quantum state engineering of the atomic field of a Bose-Einstein condensate interacting with an optical cavity

Ali Dalafi<sup>1,2</sup>, Mohammdd Hosein Naderi<sup>2</sup>, Mahmoud Soltanolkotabi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Iranian National Center of Laser Science and Technology (INLC), Tehran

<sup>2</sup>Quantum Optics Group, Department of Physics, Faculty of Science, University of Isfahan

Abstract- In this paper we investigate theoretically a system consisting of a Bose-Einstein Condensate (BEC) trapped inside the optical lattice of an optical cavity. It is shown that using the nonlinear atom-atom interaction, how one can manipulate and control the state of the Bogoliubov mode (the quantum fluctuations of the atomic field) and produce squeezed states.

Keywords: BEC, optical lattice, squeezed state

## ۱- مقدمه

چنانچه تعداد  $N$  بوزون در داخل یک چاه پتانسیل به دام بیفتند و تا دماهای بسیار پایین (در حدود میکرو کلوین) سرد شوند، آنگاه جمعیت بزرگی از آنها در پایین ترین تراز انرژی چاه پتانسیل قرار می گیرد و یک چگالیده بوز-اینشتین تشکیل می شود [۱].

در این مقاله به بررسی چگالیده‌ای متشکل از تعداد  $N$  اتم روبیدیوم می پردازیم که در داخل شبکه‌ی اپتیکی (پتانسیل تناوبی ناشی از موج ایستاده‌ی الکترومغناطیسی) یک کاواک قرار گرفته و به وسیله دو پتانسیل هماهنگ، یکی در راستای طولی (با بسامد  $\omega_{\parallel}$ ) و دیگری در راستای عرضی کاواک (با بسامد  $\omega_{\perp}$ ) به دام افتاده است [۲]. در اثر اندرکنش با میدان کوانتومی درون کاواک تعداد محدودی از اتم‌ها به نخستین حالت برانگیخته‌ی شبکه اپتیکی رانده می شوند و موجب بروز افت و خیزهای کوانتومی در میدان اتمی چگالیده می شوند که به آن مد بوگولیوبوف می گویند. در این مقاله نشان می دهیم که از آهنگ برخورد بین اتم‌ها (که توسط بسامد  $\omega_{\perp}$  قابل کنترل است) می توان به عنوان پارامتری برای کنترل درجه‌ی چلانگی مد بوگولیوبوف استفاده کرد.

در بخش ۲ به توصیف نظری سامانه و استخراج هامیلتونی آن می پردازیم و در بخش ۳ عملگر تحول زمانی سامانه را به دست می آوریم. در بخش ۴ ماتریس چگالی مد بوگولیوبوف را به دست آورده و در بخش ۵ خواص چلانگی آن را بررسی می کنیم. سرانجام در بخش ۶ نتایج به دست آمده را جمع بندی می کنیم.

## ۲- توصیف نظری سامانه

سامانه‌ی مورد مطالعه عبارتست از یک چگالیده‌ی بوز-اینشتین متشکل از تعداد  $N$  اتم دو تراز با جرم  $m_0$  و بسامد گذار  $\omega_a$  که در داخل یک کاواک اپتیکی با طول  $L$  قرار گرفته است. کاواک مزبور از طریق یکی از آینه‌هایش به وسیله یک لیزر با بسامد  $\omega_p$  با آهنگ  $\eta$  دمیده می شود. فرض می کنیم که چگالیده در داخل یک دام متقارن استوانه‌ای با فرکانس عرضی  $\omega_{\perp}$  و فرکانس طولی  $\omega_{\parallel}$  محبوس شده است. در رژیم پاشنده، که  $\Delta_a = \omega_p - \omega_a$  بسیار بزرگتر از پهنای خط اتمی  $\gamma$  است، حالت

برانگیخته‌ی الکترونی اتم را می توان به طور آدیاباتیک حذف نمود و از اثر گسیل خود به خود اتم‌ها صرف نظر کرد [۳]. در چنین شرایطی چنانچه  $\omega_{\parallel} \ll \omega_{\perp}$  باشد می توان درجه‌ی آزادی حرکتی اتم‌ها را در راستای محور  $x$  در چهارچوب فرمولبندی کوانتوم دوم با میدان کوانتومی  $\Psi(x)$  و دینامیک سامانه را با هامیلتونی مؤثر یک بعدی زیر توصیف کرد [۴]:

$$H = \int_{-L/2}^{L/2} \Psi^{\dagger}(x) \left( -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} + \hbar U_0 \cos^2(kx) \right) a^{\dagger} a + \frac{1}{2} U_s \Psi^{\dagger}(x) \Psi(x) \Psi(x) dx + \hbar \Delta_a a^{\dagger} a. \quad (1)$$

در اینجا  $a$  عملگر نابودی میدان اپتیکی درون کاواک،  $\Delta_a = \omega_0 - \omega_p$  (با بسامد بازآوایی کاواک)،  $U_0 = g_0^2 / \Delta_a$  (با بسامد رابی خلأ) و  $U_s = 4\pi\hbar^2 a_s / m_0$  است که در آن،  $a_s$  طول پراکندگی در برهم کنش اتم-اتم است [۵،۶]. هم چنین  $k = \omega_c / c$  عدد موج میدان اپتیکی درون کاواک است.

در رژیم برهم کنش ضعیف، یعنی  $U_0 \langle a^{\dagger} a \rangle \leq 10\omega_R$  که در آن،  $\omega_R = \hbar k^2 / 2m_0$  بسامد پس زنی اتمی است، می توان میدان اتمی را به دو مد متقارن کناری با تکانه‌های  $\pm \hbar k$  محدود کرد که در اثر اندرکنش اتم-فوتون برانگیخته می شوند [۷]. بدین ترتیب با توجه به بقای پاریته و در تقریب بوگولیوبوف، میدان کوانتومی اتمی به صورت زیر توصیف می شود:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{N}{L}} + \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(2kx) c. \quad (2)$$

در این معادله  $c$  عملگر نابودی مد بوگولیوبوف است که بیانگر افت و خیزهای کوانتومی حول مد چگالیده (مد تکانه‌ی صفر) است. در حد میدان‌های اپتیکی ضعیف احتمال اشغال مد  $c$  بسیار کوچکتر از مد با تکانه‌ی صفر است به گونه‌ای که  $\langle c^{\dagger} c \rangle \ll N$  است و در نتیجه می توان مد چگالیده را با عدد  $\sqrt{N}$  تقریب زد (تقریب بوگولیوبوف) [۸]. با قرار دادن معادله (۲) در معادله (۱) هامیلتونی سامانه به صورت زیر در می آید:

$$H = \hbar \delta_a a^{\dagger} a + \hbar \omega_c c^{\dagger} c + \frac{1}{4} \hbar \omega_{sw} (c^2 + c^{\dagger 2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \hbar \zeta a^{\dagger} a (c + c^{\dagger}). \quad (3)$$

در اینجا  $\delta_a = \Delta_a + \frac{1}{2} N U_0$  بسامد مؤثر میدان اپتیکی،  $\omega_c = 4\omega_R + \omega_{sw}$  بسامد مؤثر مد بوگولیوبوف،

$$H'' = S(\xi)H'S^\dagger(\xi),$$

$$= \hbar\omega'_c c^\dagger c + \hbar\delta_a a^\dagger a - \frac{\hbar}{2} \frac{\xi^2}{\omega_c + \frac{1}{2}\omega_{sw}} (a^\dagger a)^2. \quad (5)$$

اکنون با استفاده از معادلات (۴) و (۵) می‌توان عملگر تحول سامانه را به صورت زیر نوشت:

$$U(t) = \exp\left(\frac{-it}{\hbar} H\right), \quad (6)$$

$$= D^\dagger(A)S^\dagger(\xi)\exp\left(\frac{-it}{\hbar} H''\right)S(\xi)D(A).$$

#### ۴- مهندسی حالت‌های کوانتومی و تولید چلانگی

با فرض این که میدان اپتیکی در حالت اولیه‌ی همدوس  $|\alpha\rangle$  و مد بوگولیوبوف در حالت خلأ آماده‌سازی شده باشند، یعنی  $|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle_a \otimes |0\rangle_c$ ، تحول زمانی بردار حالت سامانه با استفاده از رابطه  $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$  محاسبه می‌شود. با در نظر گرفتن بسط حالت همدوس بر حسب پایه فوک و با استفاده از معادله (۶) بردار حالت سامانه در لحظه  $t$  به دست می‌آید.  $|\psi(t)\rangle$  بردار حالت سامانه‌ی متشکل از میدان اپتیکی و چگالیده است. از آنجا که می‌خواهیم خواص آمار کوانتومی چگالیده را بررسی کنیم، باید ماتریس چگالی چگالیده را به دست آوریم که عبارتست از  $\rho_c(t) = \text{Tr}_a[|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|]$  که در آن، برچسب  $c$  به مد بوگولیوبوف و برچسب  $a$  به مد میدان اپتیکی اشاره دارد. پس از انجام محاسبات، ماتریس چگالی مد بوگولیوبوف به صورت زیر به دست می‌آید

$$\rho_c(t) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} |\varphi_{n,\xi}(\tau)\rangle\langle\varphi_{n,\xi}(\tau)|. \quad (7)$$

در اینجا  $|\varphi_{n,\xi}(\tau)\rangle = D^\dagger(\beta n)S^\dagger(\xi)|\beta n e^{-i\tau}, \xi e^{-2i\tau}\rangle$  است که در آن  $\tau = \omega'_c t$  است. با توجه به این که  $|\beta n e^{-i\tau}, \xi e^{-2i\tau}\rangle$  یک حالت چلانده است، معادله (۷) نشان می‌دهد که بعد از گذشت زمان  $t$  حالت سامانه به صورت یک برهم‌نهی همدوس از حالت‌های چلانده در می‌آید. لازم به توضیح است که در اینجا اثرات ناشی از اتلاف صرف نظر شده است.

#### ۵- بررسی خواص چلانگی

چنانچه یک میدان کوانتومی در یک حالت چلانده قرار

بسامد پراکندگی در برهم‌کنش  $\omega_{sw} = 8\pi\hbar a_s N / m_0 L \omega^2$  میان اتم‌ها، و  $\xi = \frac{1}{2}\sqrt{N}U_0$  ثابت برهم‌کنش بین مد بوگولیوبوف و میدان اپتیکی درون کاواک است.

آخرین جمله‌ی هامیلتونی (۳) جمله‌ی برهم‌کنش اپتومکانیکی است [۸]. در سامانه‌های اپتومکانیک (کاواک-هایی با آینه‌ی متحرک) [۹،۱۰] فشار تابشی ناشی از میدان درون کاواک باعث حرکت ارتعاشی آینه‌ی متحرک می‌شود و در نتیجه منجر به بروز یک پتانسیل اندرکنش به شکل آخرین جمله معادله (۳) می‌شود که در آن، مد  $c$  نقش مد حرکت ارتعاشی آینه را بازی می‌کند. بدین ترتیب مد بوگولیوبوف در سامانه‌ی حاضر، متناظر با مد ارتعاشی آینه‌ی متحرک در یک سامانه‌ی اپتومکانیک است.

#### ۳- دینامیک سامانه

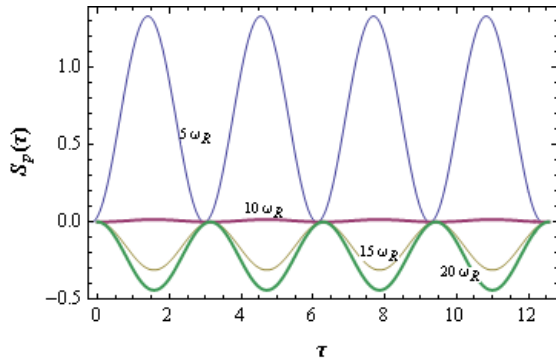
اکنون می‌خواهیم با استفاده از هامیلتونی (۳)، عملگر تحول زمانی سامانه را به دست آوریم. بدین منظور این هامیلتونی را در دو مرحله به شکل قطری درخواهیم آورد. در مرحله‌ی اول یک عملگر جابجایی به شکل  $D(A) = \exp(A(c^\dagger - c))$  تعریف می‌کنیم که در آن،  $A = \beta a^\dagger a$  و  $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\xi}{\omega_c + \omega_{sw}/2}$  است [۱۱]. اثر این عملگر بر روی  $c$  عبارتست از  $D(A)cD^\dagger(A) = c - A$ . بدین ترتیب می‌توان اثر عملگر جابجایی را بر روی هامیلتونی (۳) به صورت زیر به دست آورد:

$$H' = D(A)H D^\dagger(A),$$

$$= \hbar\delta_a a^\dagger a + \hbar\omega_c c^\dagger c + \frac{1}{4}\hbar\omega_{sw}(c^2 + c^{\dagger 2}) - \hbar(\omega_c + \frac{1}{2}\omega_{sw})A^2. \quad (4)$$

در مرحله‌ی بعد، اثر عملگر چلانگی را که به صورت  $S(\xi) = \exp(\frac{1}{2}\xi(c^2 - c^{\dagger 2}))$  بر روی هامیلتونی (۴) به دست می‌آوریم. اثر این عملگر بر روی  $c$  عبارتست از  $S(\xi)cS^\dagger(\xi) = \mu c + \nu c^\dagger$  که در آن  $\mu = \cosh \xi$ ،  $\nu = s i \xi$  و  $\xi$  پارامتر چلانگی است [۱۲]. می‌توان نشان داد چنانچه  $\xi = \frac{1}{2}\hbar(\omega'_c - \omega_c)$  باشد که در آن  $\omega'_c = \sqrt{\omega_c^2 - \frac{1}{4}\omega_{sw}^2}$  است و همچنین اگر  $\mu = \sqrt{\omega_c/2\omega'_c + 1/2}$  و  $\nu = \sqrt{\omega_c/2\omega'_c - 1/2}$  انتخاب شوند، آنگاه خواهیم داشت:

از طریق  $\omega_{\perp}$  قابل کنترل است. از آنجایی که بسامد دام عرضی به طور تجربی قابل کنترل است، بدین ترتیب با تغییر آن می‌توان نرخ برخورد اتمی را تغییر داد و در نتیجه درجه چلانندی مد بوگولیووف را کنترل کرد.



شکل ۱: تحول زمانی پارامتر چلانندی  $S_p(\tau)$  به ازای داده‌های تجربی مرجع [۱۴] برای چهار مقدار مختلف بسامد برخورد:  $\omega_{sw} = 5\omega_R$  (منحنی آبی)،  $\omega_{sw} = 10\omega_R$  (منحنی بنفش)،  $\omega_{sw} = 15\omega_R$  (منحنی خردلی) و  $\omega_{sw} = 20\omega_R$  (منحنی سبز). همچنین  $\alpha^2 = 0.01$  فرض شده است.

### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی اندرکنش یک چگالیده بوز-اینشتین با میدان کوانتومی درون یک کاواک اپتیکی پرداخته و نشان داده‌ایم که اندرکنش اتم-میدان موجب بروز افت و خیزهای کوانتومی در میدان اتمی می‌شود. حالت کوانتومی این افت و خیزها به نرخ برخورد بین اتم-ها بستگی دارد به گونه‌ای که افزایش نرخ برخورد اتمی می‌تواند منجر به بروز خاصیت چلانندی در افت و خیزهای میدان اتمی شود.

### مراجع

- [1] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [2] O. Morsch and M. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
- [3] C. Maschler and H. Ritsch, *Opt. Commun.* **243**, 145 (2004).
- [4] A. Dalafi, M. H. Naderi, M. Soltanolkotabi, and Sh. Barzanjeh, *Phys. Rev. A* **87**, 013417 (2013).
- [5] P. Domokos and H. Ritsch, *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 1098 (2003).
- [6] C. Maschler and H. Ritsch, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 260401 (2005).
- [7] D. Nagy, P. Domokos, A. Vukics, and H. Ritsch, *Eur. Phys. J. D* **55**, 659 (2009).
- [8] R. Kanamoto and P. Meystre, *Phys. Scr.* **82**, 038111 (2010).
- [9] J. D. McCullen, P. Meystre, and E. M. Wright, *Opt. Lett.* **9**, 193-195 (1984).
- [10] P. Meystre, E. M. Wright, J. D. McCullen, and E. Vignes, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1830-1840 (1985).

گرفته باشد، آنگاه افت و خیزهای کوانتومی مربوط به یکی از مؤلفه‌های کوادراتوری میدان (عملگرهای متناظر با مکان و تکانه) کاهش می‌یابد در حالی که برای مؤلفه‌ی دیگر، افت و خیزهای مزبور افزایش می‌یابد [۱۲]. مؤلفه‌های کوادراتوری میدان بوگولیووف به صورت  $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(c + c^\dagger)$  و  $p = \frac{1}{\sqrt{2i}}(c - c^\dagger)$  تعریف می‌شوند. درجه‌ی چلانندی در هر یک از این مؤلفه‌ها با پارامتر چلانندی مشخص می‌شود:  $S_q(\tau) = 2\langle(\Delta q)^2\rangle - 1$  و  $S_p(\tau) = 2\langle(\Delta p)^2\rangle - 1$  که در آنها،  $(\Delta q)^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2$  و  $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$  هستند. بدین ترتیب، شرط چلانندی در هر یک از مؤلفه‌ها به صورت  $S_i(\tau) < 0$  ( $i = p$  or  $q$ ) تعریف می‌شود.

با در دست داشتن ماتریس چگالی مد بوگولیووف (معادله (۷))، می‌توان پارامتر چلانندی  $S_p(\tau)$  را به دست آورد:

$$S_p(\tau) = 4\beta^2 |\alpha|^2 (\mu - \nu)^4 \sin^2 \tau + 2\nu(\mu - \nu)((\mu - \nu)(\mu \cos 2\tau + \nu) - 1). \quad (8)$$

در اینجا باید تاکید شود که عامل تولید اثر چلانندی، برهم‌کنش غیر خطی اتم-اتم است. بنا بر توضیحات بخش قبل چنانچه این عامل غیرخطیت، صفر شود (یعنی اگر  $\omega_{sw} = 0$ ) آنگاه  $\xi = 0$  و در نتیجه  $(\mu = 1, \nu = 0)$  خواهد شد. بدین ترتیب پارامتر چلانندی به صورت  $S_p(\tau) = 4\beta^2 |\alpha|^2 \sin^2 \tau$  درمی‌آید که همواره مثبت است. یعنی در غیاب برهم‌کنش اتمی، خاصیت چلانندی از بین می‌رود.

در شکل (۱) پارامتر چلانندی  $S_p(\tau)$  بر حسب متغیر زمان بدون بعد  $\tau$  رسم شده است. برای رسم این نمودار از داده‌های تجربی مراجع [۱۳، ۱۴] استفاده شده است، یعنی تعداد  $N = 10^5$  اتم  $^{87}Rb$  در کاواکی با طول  $L = 178 \mu m$  به دام افتاده و تا دمای  $0.1 \mu K$  سرد شده‌اند.  $\lambda = 780 nm$  طول موج میدان اپتیکی،  $\Delta_a = 2\pi \times 58 GHz$ ،  $g_0 = 2\pi \times 14.1 MHz$  و طول پراکنندگی در برهم‌کنش اتم-اتم  $a_s = 5 nm$  است.

همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است خاصیت چلانندی به ازای  $\omega_{sw} > 10\omega_R$  بروز می‌کند. بدین ترتیب از  $\omega_{sw}$  می‌توان به عنوان عاملی برای کنترل درجه‌ی چلانندی حالت مد بوگولیووف استفاده کرد. این پارامتر

- [11] Bose S, Jacobs K and Knight P L 1997 *Phys. Rev. A* **56** 4175
- [12] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001).
- [13] F. Brennecke, S. Ritter, T. Donner, and T. Esslinger, *Science* **322**, 235 (2008).
- [14] S. Ritter, F. Brennecke, K. Baumann, T. Donner, C. Guerlin, and T. Esslinger, *Appl. Phys. B* **95**, 213 (2009).