بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

ناهمخوانی کوانتومی حالت‌های دوکیوبیتی

سید جواد اخترشناس[۱و۲و۳]، حمیدرضا محمدی[۱و۲]، وحید نساج‌پور[۱] و فهیمه سادات موسوی[۱]

[۱]گروه فیزیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

[۲] گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی، دانشگاه اصفهان، اصفهان

[۳] گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

چکیده - در این مقاله، یک رابطه ساده برای آنتروپی شرطی ارائه می‌کنیم که عبارتست از تفاضل دو آنتروپی شانون. این رابطه ما را قادر می‌سازد تا ناهم‌خوانی کوانتومی را برای دسته‌ای خاص از حالت‌های دوکیوبیتی به صورت تحلیلی محاسبه کنیم و همچنین این رابطه منجر به یافتن یک کران بالای محکم برای ناهم‌خوانی کوانتومی یک حالت دلخوه دوکیوبیتی می‌شود. به علاوه رابطه‌ای تحلیلی برای بهینه‌سازی ارائه می‌کنیم و شرایطی که آنتروپی شرطی یک حالت دوکیوبیت دلخواه، تحت آن‌ها پایاست، را بدست می‌آوریم.

کلید واژه- هم‌بستگی کوانتومی، ناهم‌خوانی کوانتومی، آنتروپی شرطی، کران بالای محکم.

Quantum Discord of two-qubit states

S. Javad, Akhtarshenas[1,2,3], Hamidreza, Mohammadi [1,2], Vahid, Nassajpour[1], and Fahimeh S. Mousavi[1]

[1] Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan, Iran

[2] Quantum Optics Group, University of Isfahan, Isfahan, Iran

[3] Department of Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Abstract- In this paper, we provide a simple relation for the conditional entropy as the difference of two Shannon entropies. This relation leads to an analytical formula for discord of some special two-qubit states and also it presents a tight upper bound for quantum discord of a general two-qubit state. We also present an analytical procedure of optimization and obtain conditions under which the quantum conditional entropy of a general two-qubit state is stationary.

Keywords: Quantum correlation, Quantum discord, Shannon entropy, Tight upper bound.

۱-مقدمه

درهم‌تنیدگی یکی از ویژگی‌های سامانه‌های کوانتومی است که با وجود آن اطلاعات کامل از تک‌تک قسمت‌های یک سامانه مرکب، تمامی اطلاعات مربوط به کل سامانه را شامل نمی‌شود [۱]. اما این ویژگی تنها ویژگی سامانه‌های کوانتومی نیست؛ به‌عنوان مثال، ازبین رفتن یک قسمت از سامانه کوانتومی دوجزئی غیردرهم‌تنیده بعد از اندازه‌گیری روی قسمت دیگر، ویژگی دیگری است که خاص سامانه‌های کوانتومی است. کمیتی که این ویژگی را دربر می‌گیرد، «ناهم‌خوانی کوانتومی» نام دارد. طبق تعریف ناهم‌خوانی کوانتومی اختلاف دو عبارت هم‌ارز کلاسیکی اطلاعات متقابل می‌باشد[۳,۲]. به زبان ریاضی، ناهم‌خوانی را می‌توان از طریق زدودن همه هم‌بستگی‌های کلاسیکی از هم‌بستگی کل که توسط اطلاعات متقابل اندازه‌گیری می‌شود، بدست آورد. حذف هم‌بستگی‌های کلاسیکی توسط اعمال مخرب-ترین اندازه‌گیری روی یک قسمت از سامانه صورت می‌گیرد. اطلاعات متقابل یک سامانه دو قسمتی به صورت:

$$I(\rho^{AB}) = S(\rho^{A}) + S(\rho^{B}) - S(\rho^{AB}), \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود. در اینجا ρ^{A} و ρ^{B} به‌ترتیب ماتریس‌های چگالی کاهش‌یافته سامانه‌های A و B، ρ^{AB} ماتریس چگالی سامانه کل و $S(\rho) = -Tr(\rho\, log\, \rho)$ آنتروپی فون‌نویمان هستند. هم‌بستگی کلاسیکی بین دو قسمت سامانه کل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$C(\rho^{AB}) = \ sup_{\{\Pi_k^B\}}\{S(\rho^{A}) - S(\rho^{A}|\{\Pi_k^B\}\}, \qquad (۲)$$

در این‌جا عمل بیشینه‌یابی روی تمامی اندازه‌گیری‌های برافکنشی $\{\Pi_k^B\}$ بر روی سامانه B انجام می‌شود. در این رابطه $S(\rho^{A}|\{\Pi_k^B\}$ آنتروپی شرطی زیرسامانه A پس از اندازه‌گیری، $\rho_k^A = Tr_B[\frac{1}{p_k}(\mathbb{I}\otimes\Pi_k^B)\rho^{AB}(\mathbb{I}\otimes\Pi_k^B)$ حالت زیرسامانه A بعد از اندازه‌گیری و $p_k = Tr_{AB}(\mathbb{I}\otimes\Pi_k^B)\rho^{AB}(\mathbb{I}\otimes\Pi_k^B)$ احتمال حصول خروجی kام می‌باشند. بر این اساس ناهم‌خوانی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$D_B(\rho^{AB}) = I(\rho^{AB}) - C_B(\rho^{AB}). \qquad (۳)$$

تاکنون ناهم‌خوانی کوانتومی تنها برای دسته کوچکی از حالت‌ها شامل حالت‌های بل-قطری [۵,۴]، حالت‌های X دو-کیوبیتی[۶-۸]، دو-کیوبیت‌های مرتبه دو [۹]، دسته‌ای از حالت‌های مرتبه دو از سامانه‌های $4 \otimes 2$ [۱۰] ، و برخی حالت‌های گاوسی با متغیر پیوسته [۱۱] بصورت تحلیلی بدست آمده است.

در این مقاله، رابطه‌ای ساده برای آنتروپی شرطی حالت‌های دو کیوبیتی دلخواه، بصورت تفاضل دو آنتروپی شانون ارائه می‌کنیم و با استفاده از آن ناهم‌خوانی برخی از حالت‌ها را بدون نیاز به کمینه‌سازی محاسبه می‌کنیم. همچنین شرایط اکسترمم بودن آنتروپی شرطی را بدست می‌آوریم.

۲-آنتروپی‌شرطی و ناهمخوانی‌کوانتومی حالت دوکیوبیت

شکل کلی ماتریس چگالی یک سامانه دو-کیوبیتی در نمایش هیلبرت-اشمیت بصورت زیر است:

$$\rho^{AB} = \frac{1}{4}\left(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + \vec{x}.\sigma\otimes\mathbb{I} + \mathbb{I}\otimes\vec{y}.\sigma + \sum_{i,j=1}^{3} t_{ij}\sigma_i\otimes\sigma_j\right)$$

که $\mathbb{I}$ عملگر یکانی، $\{\sigma_i\}_{i=1}^{3}$ ماتریس‌های پاؤلی، $\vec{x}$ ($\vec{y}$) بردارهای همدوس سامانه‌های A (B) و $T = t_{ij}$ ماتریس هم‌بستگی هستند.

بنابراین هر حالت ρ^{AB} توسط سه تایی $\{\vec{x}, \vec{y}, T\}$ مشخص می‌شود. به دلیل اینکه هم‌بستگی‌های کوانتومی تحت تبدیل‌های یکانی محلی ناودا هستند، می‌توان ماتریس همبستگی را قطری در نظر گرفت. این موضوع چیزی از کلیت مسئله نمی‌کاهد. بنابراین کلی‌ترین حالت را می‌توان بصورت زیر پارامتریزه کرد:

$$\rho^{AB} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & y_1 - iy_2 & x_1 - ix_2 & t_1 - t_2 \\ y_1 + iy_2 & \rho_{22} & t_1 + t_2 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & t_1 + t_2 & \rho_{33} & y_1 - iy_2 \\ t_1 - t_2 & x_1 + ix_2 & y_1 + iy_2 & \rho_{44} \end{pmatrix},$$

که $\rho_{11} = 1 + x_3 + y_3 + t_3$ و $\rho_{22} = 1 + x_3 - y_3 - t_3$ و $\rho_{33} = 1 - x_3 + y_3 - t_3$ و $\rho_{44} = 1 - x_3 - y_3 + t_3$ است.

اکنون به بررسی اندازه‌گیری‌های فون‌نویمان روی یکی از زیرسامانه‌ها (B) می‌پردازیم. کلی‌ترین شکل این اندازه‌گیری بصورت:

$$\Pi_k^B = U|k\rangle\langle k|U^{\dagger} \qquad (۴)$$

است که $\{|k\rangle\langle k|\}_{k=0}^{1}$ عملگرهای برافکنشی در پایه‌های استاندارد و U یک عملگر یکانی دلخواه می‌باشد. با نوشتن اندازه‌گیری برافکنشی (Π_k^B) و حالت پس از اندازه‌گیری

(ρ_k^A) در نمایش بلاخ و انجام اندکی محاسبات، آنتروپی شرطی $S(\rho^A|\{\Pi_k^B\})$ به شکل ساده زیر در می‌آید:

$$S(\rho^A|\{\Pi_k^B\}) = h_4(\vec{w}) - h_2(p_0), \qquad (۵)$$

که $h_m(q_1,\dots,q_m) = -\sum_{i=1}^m q_i \log q_i$ آنتروپی شانون احتمال‌های $\{q_1,\cdots q_m\}$ می‌باشد و $h_2(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ معرف تابع آنتروپی دودوئی است. احتمال حصول خروجی kام از رابطه $p_k = \frac{1}{2}(1+\vec{y}^t\hat{n}_k)$ بدست می‌آید، که $\hat{n}_k$ ها بردار بلاخ تصویرگر Π_k^B است و راستای اندازه‌گیری بهینه را نشان می‌دهد: $\hat{n}_0 = -\hat{n}_1 = \hat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)^t$.

بنابراین خواهیم داشت:

$$w_{1,2} = \frac{2p_0 \pm |\vec{x}+T\hat{n}|}{4}, \qquad w_{3,4} = \frac{2p_1 \pm |\vec{x}-T\hat{n}|}{4}. \qquad (۶)$$

۳-بررسی حالت‌های خاص

فرمول بسته‌ای که در بخش قبل برای آنتروپی شرطی ارائه شد ما را قادر می‌سازد که برای دسته‌ای خاص ازحالات که برای آن‌ها $T^t\vec{x} = 0$ و $\vec{y} = 0$ است، رابطه‌ای تحلیلی برای ناهم‌خوانی کوانتومی بدست آوریم. برای این دسته داریم: $|\vec{x}+T\hat{n}| = |\vec{x}-T\hat{n}| = \sqrt{x^2+\hat{n}^tT^tT\hat{n}}$ که $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ و $w_{1,2} = w_{3,4} = \frac{1}{4}(1 \pm |\vec{x} \pm T\hat{n}|)$ است. بنابراین کمینه این عبارت به ازای $\hat{n}$ متناظر با ویژه بردار مربوط به بزرگترین ویژه مقدار T^tT رخ می‌دهد. این دسته از حالات خود شامل چهار حالت مهم زیر است:

۱) حالت‌های بل-قطری: برای این حالت‌ها $\vec{x} = \vec{y} = 0$ و $T = diag\{t_1, t_2, t_3\}$ است و بنابراین داریم:

$$p_0 = p_1 = \frac{1}{2}, \qquad w_{1,2} = w_{3,4} = \frac{1}{4}(1 \pm |T\hat{n}|) \qquad (۷)$$

و آنتروپی شرطی به آسانی بدست می‌آید:

$$S(\rho^A|\{\hat{n}\}) = h_2\left(\frac{1+|T\hat{n}|}{2}\right) \qquad (۸)$$

کمینه عبارت بالا برای $\max|T\hat{n}| = \max\sqrt{\hat{n}^tT^tT\hat{n}}$ اتفاق می‌افتد. بدیهی است که $\hat{n}$ باید ویژه بردار متناظر با بزرگترین ویژه مقدار T^tT باشد، بنابراین ناهمخوانی کوانتومی برای حالات بل-قطری از فرمول بسته زیر بدست می‌آید:

$$D(\rho) = 1 - h_2(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4) + h_2\left(\frac{1+|t_{max}|}{2}\right) \qquad (۹)$$

در اینجا $t_{max} = max\{|t_1|,|t_2|,|t_3|\}$ و μ_i ها ویژه مقادیر ρ^{AB} هستند:

$$\mu_{1,2} = \tfrac{1}{4}(1 \pm t_1 \pm t_2 - t_3), \qquad \mu_{3,4} = \tfrac{1}{4}(1 \pm t_1 \mp t_2 + t_3).$$

۲) دسته‌ای از حالات که برای آن‌ها $x_1 = x_2 = t_3 = 0$ است. این دسته از حالات زیرمجموعه سه پارامتری از حالت‌های X هستند که ناهم‌خوانی آن‌ها برابراست با:

$$D(\rho^{AB}) = 1 - h_2(\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4) + h_2\left(\frac{1+\sqrt{t_1^2+x_3^2}}{2}\right), \qquad (۱۰)$$

$$\mu_{1,2} = \tfrac{1}{4}(1 \pm \sqrt{(t_1+t_2)^2+x_3^2}), \ \mu_{3,4} = \tfrac{1}{4}(1 \pm \sqrt{(t_1-t_2)^2+x_3^2}.$$

۳) دسته‌ای از حالات که برای آن‌ها $x_1 = t_2 = t_3 = 0$ است. این حالات یک زیرمجموعه سه پارامتری از حالت‌های کلاسیکی-کوانتومی(ناهم‌خوانی صفر) هستند.

۴) دسته‌ای از حالات که برای آن‌ها $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ است این حالات نیز یک زیرمجموعه سه پارامتری از حالت‌های کلاسیکی-کوانتومی(ناهم‌خوانی صفر) هستند.

۴-کران بالای ناهمخوانی کوانتومی

فرمول (۵) برای آنتروپی شرطی، یک کران بالای محکم را برای حالت‌های دلخواه دو کیوبیتی نتیجه می‌دهد. این کران از دیگر کران‌های معرفی شده قوی‌تر است. وجود این کران نتیجه قضیه زیر است.

تعریف: زیرفضایی از $\mathbb{R}^3$ که توسط $\vec{y}$ و $T^t\vec{x}$ برپا می‌شود را $\mathcal{R}$ و زیرفضای عمود بر آن را $\mathcal{R}^\perp$ می‌نامیم.

قضیه: آنتروپی شرطی توسط رابطه زیر از بالا کران‌دار است:

$$minS(\rho^A|\{\Pi_k^B\}) \le h_2\left(\frac{1+\sqrt{x^2+t_0^2}}{2}\right) \qquad (۱۱)$$

که $t_0^2 = max_{\hat{e}_0\in\mathcal{R}^\perp}\, \hat{e}_0^t\ T^tT\ \hat{e}_0$ بنابراین میزان هم‌بستگی‌های کلاسیکی و کوانتومی به ترتیب از پایین و بالا به صورت زیر محدود می‌شوند:

$$C(\rho^{AB}) \ge S(\rho^A) - h_2\left(\frac{1+\sqrt{x^2+t_0^2}}{2}\right) \qquad (۱۲)$$

$$Q(\rho^{AB}) \le S(\rho^B) - S(\rho^{AB}) + h_2\left(\frac{1+\sqrt{x^2+t_0^2}}{2}\right) \qquad (۱۳)$$

اثبات: اثبات این قضیه در مرجع [۱۲] آمده است. ذکر این نکته حائز اهمیت است که رابطه تساوی وقتی حاصل می‌شود که: $\mathcal{R}^{\perp} = \mathbb{R}^3$ به عنوان مثال این اتفاق برای حالت‌های خاص مذکور در بالا اتفاق می‌افتد. دراین صورت $t_0^2 = t_{max}^2$ است. بررسی بیشتر نشان می‌دهد که حتی وقتی $\mathcal{R}^{\perp} \neq \mathbb{R}^3$ باشد ممکن است حالت تساوی بدست آید. در این صورت کمینه مطلق آنتروپی شرطی به ازای اندازه‌گیری در جهتی که متعلق به $\mathcal{R}^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^3$ است اتفاق می‌افتد.

۵-بهینه سازی

در این بخش روشی تحلیلی برای کمینه‌سازی آنتروپی شرطی در مورد حالت‌های دوکیوبیتی دلخواه ارائه می‌کنیم. همچنین برای برخی حالت‌های خاص ناهم‌خوانی را به روش بهینه‌سازی محاسبه می‌کنیم. اندازه‌گیری‌ها توسط دو پارامتر θ و ϕ توصیف می‌شوند؛ با محاسبه مشتق‌های w_j و p_j بر حسب θ و ϕ پس از اندکی عملیات جبری رابطه زیر را برای جهت اندازه‌گیری بهینه بدست می‌آوریم

$$\vec{A}.\hat{n}_{\perp} = 0 \qquad (۱۴)$$

در این رابطه $\vec{A}$ به صورت:

$$\vec{A} = \left[log\frac{w_1 w_2 {p_1}^2}{w_3 w_4 {p_0}^2}\right]\vec{y} + \left[log\frac{w_1}{w_2}\right]T^t\hat{Z}^+ + \left[log\frac{w_3}{w_4}\right]T^t\hat{Z}^- \qquad (۱۵)$$

است. در اینجا $\hat{Z}^+ = \frac{T\hat{n}+\vec{x}}{|T\hat{n}+\vec{x}|}$ و $\hat{Z}^- = \frac{T\hat{n}-\vec{x}}{|T\hat{n}-\vec{x}|}$ در حالت کلی به دلیل این که $\vec{A}$ خود برحسب $\hat{n}$ است یافتن چنین $\hat{n}$ ی مشکل است. به هر حال عمل بهینه‌یابی برای برخی حالت‌های خاص پاسخ تحلیلی دارد.

۶-نتیجه‌گیری

مشکل اصلی در محاسبه ناهمخوانی کوانتومی، یافتن کمینه آنتروپی شرطی، نسبت به تمام اندازه‌گیری‌ها روی زیرسامانه B می‌باشد. در این مقاله ما با ارائه یک شکل ساده برای آنتروپی شرطی، که عبارتست از تفاضل دو آنتروپی شانون، برای حالت‌هایی با $T^t\vec{x} = 0\,, \vec{y} = 0$، رابطه‌ای تحلیلی برای ناهمخوانی کوانتومی بدست آوردیم. حالت $T^t\vec{x} = 0\,, \vec{y} = 0$ شامل حالت‌های بل-قطری، حالت‌های سه پارامتری از دسته حالت‌های X، و بعضی از حالت‌های با ناهم‌خوانی صفر، می‌شود. برای این دسته بدون بهینه‌سازی نشان دادیم آنتروپی شرطی به آنتروپی شانون دودویی کاهش می‌یابد. همچنین نشان دادیم رابطه بدست آمده در این دسته برای آنتروپی شرطی، می‌تواند به عنوان کران بالایی برای ناهم‌خوانی استفاده شود. سپس با ارائه‌ی روش بهینه‌سازی، نقاط اکسترمم آنتروپی شرطی را بدست آوردیم.

سپاسگزاری

نویسندگان از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان سپاسگزاری می‌نمایند.

مراجع

[1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" Phys. Rev. **47**, 777 (1935)

[2] H. Ollivier and W. H. Zurek, "Quantum Discord:A Measure of the Quantumness of Correlations," Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).

[3] L. Henderson, and V. Vedral, "Information, Relative Entropy of Entanglement, and Irreversibility," J. Phys. A **34**, 6899 (2001).

[4] S. Luo, "Quantum discord for two-qubit systems," Phys. Rev. A **77**, 042303 (2008).

[5] M. D. Lang, and C. M. Caves, "Quantum Discord and the Geometry of Bell-Diagonal States" Phys. Rev. Lett. **105**, 150501 (2010).

[6] M. Ali, A. R. P. Rau, and G. Alber, "Quantum discord for two-qubit X states," Phys. Rev. A **81**, 042105 (2010).

[7] Q. Chen, C. Zhang, S. Yu, X. X. Yi, and C. H. Oh, "Quantum discord of two-qubit X states," Phys. Rev. A **84**, 042313 (2011).

[8] G. Adesso and A. Datta, "Quantum versus Classical Correlations in Gaussian States" Phys. Rev. Lett. **105**, 030501 (2010).

[9] M. Shi, W. Yang, F. Jiang, and J. Du, "Quantum discord of two-qubit rank-2 states" J. Phys. A: Math. Theor. **44**, 415304 (2011).

[10] L. X. Cen, X. Q. Li, J. Shao, and Y. J. Yan, "Quantifying quantum discord and entanglement of formation via unified purifications Phys. Rev. A **83**, 054101 (2011).

[11] D. Girolami, and G. Adesso, "Quantum discord for general two-qubit states: Analytical progress" Phys. Rev. A **83**, 052108 (2011).

[12] S. J. Akhtarsenas, H. Mohammadi, F. Mosavi, V. Nasajpour, "Quantum Discord of an Arbitrary State of Two Qubits," arXiv:1304.3914 (2013).