بیستمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران
و ششمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران
۸ تا ۱۰ بهمن ماه۱۳۹۲ - دانشگاه صنعتی شیراز

رهیافتی هندسی برای محاسبه‌ی هم‌بستگی کوانتومی

سید جواد اخترشناس[۱و۲و۳]، حمیدرضا محمدی[۱و۲]، سامان کریمی[۱] و زهرا عزمی[۱]

[۱]گروه فیزیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان

[۲]گروه پژوهشی اپتیک کوانتومی،دانشگاه اصفهان، اصفهان

[۳]گروه فیزیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

چکیده – حالت کلی سامانه‌ی $m \otimes n$، حالتی کلاسیکی- کوانتومی است اگر و تنها اگر مرتبه ماتریس چپ-هم‌بستگی مربوط به آن بزرگ‌تر از $m-1$ نباشد. بر اساس این شرط، سنجه‌ای قابل محاسبه برای ناهم‌خوانی کوانتومی ارائه شده است که منطبق بر کران پایین محکم سنجه‌ی هندسی ناهم‌خوانی است. بنابراین این حد پایین محکم، کاملاً هم‌بستگی کوانتومی را در بر می‌گیرد و خود می‌تواند به عنوان سنجه‌ای برای ناهم‌خوانی استفاده شود. از این رو صفر شدن کران پایین محکم ناهم‌خوانی هندسی، شرط لازم و کافی برای ناهم‌خوانی صفر بودن حالت‌های کوانتومی است.

کلید واژه- حالت‌های کلاسیکی-کوانتومی ، ماتریس چپ-هم‌بستگی، ناهم‌خوانی کوانتومی ، هم‌بستگی کوانتومی.

A Geometrical Approach to Quantum Correlation

S. Javad Akhtarshenas [1,2,3], Hamidreza Mohammadi[1,2], Saman Karimi[1] and Zahra Azmi[1]

[1]Department of Physics, University of Isfahan, Isfahan

[2]Quantum Optics Group, University of Isfahan, Isfahan

[3]Departmentof Physics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad

Abstract- A general state of an $m \otimes n$ system is a classical-quantum state if and only if its associated left-correlation matrix has rank no larger than m-1. Based on this condition, a computable measure of quantum discord is presented, which coincides with the tight lower bound on the geometric measure of discord. Therefore such obtained tight lower bound fully captures the quantum correlation of a bipartite system, so it can be used as a measure of discord in its own right. Accordingly, a vanishing tight lower bound on the geometric discord is a necessary and sufficient condition for a state to be zero-discord.

Keywords: classical-quantum states, left-correlation matrix, quantum discord, quantum correlation.

۱- مقدمه

ناهم‌خوانی کوانتومی معیاری برای سنجش میزان هم‌بستگی کوانتومی نهفته در یک سامانه کوانتومی است که از زاویه‌ی جدیدی به هم‌بستگی‌ها می‌نگرد. در حقیقت ناهم‌خوانی کوانتومی میزان هم‌بستگی نهفته در یک سامانه را با استفاده از مفهوم اندازه‌گیری و اطلاعات قابل حصول پس از اندازه‌گیری می‌سنجد و بنابراین تفاوت اساسی با معیار دیگر هم‌بستگی کوانتومی یعنی درهم‌تنیدگی دارد [۱و۲]. نشان داده شده است که حالت‌های جداپذیری (غیردرهم‌تنیده‌ای) وجود دارند که ناهم‌خوانی غیر صفر دارند و این حالت‌های جداپذیر را می‌توان به عنوان منبعی برای بالا بردن کیفیت مخابرات کوانتومی و سرعت بخشیدن به فرآیندهای محاسبات کوانتومی به کار برد [۳و۴]. از آنجا که اغلب سامانه‌های مورد استفاده در مخابرات و نیز در رایانه‌های کوانتومی که از سامانه‌های فوتونیکی استفاده می‌کنند را می‌توان با فضای هیلبرت با ابعاد متناهی بزرگ مدل‌سازی نمود، لذا معرفی سنجه‌ای برای سنجش هم‌بستگی‌های کوانتومی در چنین سامانه‌هایی حائز اهمیت می‌باشد. در میان سنجه‌های گوناگون ناهم‌خوانی کوانتومی، ناهم‌خوانی هندسی که در ابتدا توسط داکیک و همکارانش پیشنهاد شد، سنجه‌ای ساده و قابل اندازه‌گیری برای هم‌بستگی‌های غیر کلاسیکی می‌باشد [۵]. ناهم‌خوانی هندسی به صورت فاصله‌ی هیلبرت-اشمیت بین حالت سامانه‌ی کوانتومی و نزدیک‌ترین حالت با ناهم‌خوانی صفر تعریف می‌شود. برای یک حالت دو قسمتی ρ روی فضای هیلبرت $\mathrm{H}^A \otimes \mathrm{H}^B$، ناهم‌خوانی هندسی به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$D_G(\rho) = \min_{\chi \in \Omega_0} \|\rho - \chi\|^2, \qquad \textbf{(۱)}$$

که در آن Ω_0 نشان دهنده‌ی مجموعه حالت‌های با ناهم‌خوانی صفر و $\|X-Y\|^2 = Tr[(X-Y)(X-Y)^\dagger]$ نرم هیلبرت-اشمیت است. این کمیت برای حالت‌های کلاسیکی-کوانتومی صفر می‌شود. داکیک و همکارانش همچنین با استفاده از نمایش هیلبرت-اشمیت فرمول‌بندی بسته‌ای برای ناهم‌خوانی هندسی حالت‌های دوکیوبیتی دلخواه برحسب بردارهای همدوس و ماتریس هم‌بستگی حالت به دست آورند. تاکنون ناهم‌خوانی هندسی برای حالت‌های دلخواه $2 \otimes n$ و برخی حالت‌های خاص $m \otimes m$ مانند حالت‌های ورنر و حالت‌های همسانگرد (ایزوتروپیک) محاسبه شده است. لو و فو شکل هم‌ارز دیگری را برای ناهم‌خوانی هندسی که مبتنی بر اندازه گیری است به صورت زیر معرفی نمودند [۶]:

$$D_G(\rho) = \min_{\Pi^A} \left\|\rho - \Pi^A(\rho)\right\|^2, \qquad \textbf{(۲)}$$

که در آن، کمینه‌سازی بر روی تمامی اندازه‌گیری‌های فون‌نویمن $\Pi^A = \left\{\Pi_k^A\right\}_{k=1}^m$ بر H^A انجام شده است. در این معادله $\Pi^A(\rho) = \sum_{k=1}^m \left(\Pi_k^A \otimes I^B\right)\rho\left(\Pi_k^A \otimes I^B\right)$ حالت پس از اندازه‌گیری است. نمایش کلی حالت یک سامانه دو بخشی $m \otimes n$ در نمایش هیلبرت-اشمیت به صورت زیر است:

$$\rho = \frac{1}{mn}\left(I \otimes I + \vec{x} \otimes \hat{\lambda}^A \otimes I + I \otimes \vec{y}\hat{\lambda}^B + \sum_{i=1}^{m^2-1}\sum_{j=1}^{n^2-1} t_{ij}\hat{\lambda}_i^A \otimes \hat{\lambda}_j^B\right). \qquad (۳)$$

که در آن، $\vec{x} = \left(x_1, ..., x_{m^2-1}\right)^t$ و $\vec{y} = \left(y_1, \ldots, y_{n^2-1}\right)^t$ به ترتیب بردارهای همدوس زیر سامانه‌های A و B می‌باشند:

$$\mathrm{x}_i = \frac{m}{2} Tr\left[\left(\hat{\lambda}_i^A \otimes I\right)\rho\right], y_j = \frac{n}{2} Tr\left[\left(I \otimes \hat{\lambda}_j^B\right)\rho\right], \qquad (٤)$$

$T = (t_{ij})$ نیز ماتریس هم‌بستگی است:

$$t_{ij} = \frac{mn}{4} Tr\left[\left(\hat{\lambda}_i^A \otimes \hat{\lambda}_j^B\right)\rho\right]. \qquad (۵)$$

در اینجا $\left\{X_i\right\}_{i=0}^{m^2-1}$ و $\left\{Y_j\right\}_{j=0}^{n^2-1}$ به‌ترتیب مولدهای جبر $SU(m)$ و $SU(n)$ هستند، این عملگرها هرمیتی و متعامد بهنجار هستند. رانا و همکارانش [۷] و بطور مستقل حسن و همکارانش [۸] با استفاده از نمایش هیلبرت-اشمیت برای یک حالت دوقسمتی کلی ρ بر فضای هیلبرت دو بخشی $m \otimes n$، یک کران پایین برای ناهم‌خوانی هندسی به صورت زیر تعریف نمودند.

$$D_G(\rho) \geq \frac{2}{m^2 n}\left(\|\vec{x}\|^2 + \frac{2}{n}\|T\|^2 - \sum_{k=1}^{m-1}\eta_k^{\downarrow}\right) = \frac{2}{m^2 n}\sum_{k=m}^{m^2-1}\eta_k^{\downarrow}, \qquad (٦)$$

که $\left\{\eta_k^{\downarrow}\right\}_{k=1}^{m^2-1}$ ویژه مقادیر ماتریس $G := \vec{x}\vec{x}^t + \frac{2}{n}TT^t$ هستند که به ترتیب غیرافزایشی مرتب شده‌اند. از آنجایی که این کران پایین برای حالت‌های $m \otimes m$ ورنر و

آیزوتروپیک و همچنین برای حالت‌های دلخواه $2\otimes n$، با ناهم‌خوانی هندسی منطبق می شود، این کران یک کران محکم برای ناهم‌خوانی هندسی است.

براساس مرتبه ماتریس هم‌بستگی، داکیک و همکارانش [۵]، شرط لازم برای ناهم‌خوانی صفر بودن حالت‌های دوقسمتی دلخواه معرفی نمودند. پس از آن شرط لازم و کافی برای صفر بودن ناهم‌خوانی حالت‌های دوکیوبیتی توسط لو و همکارانش ارائه شد [۹]. شرط آن‌ها وجود یک بردار واحد $\hat{n}\in\mathbb{R}^3$ که شرایط زیر را ارضاء می‌کند، است:

$$\hat{n}\hat{n}^t\vec{x}=\vec{x}, \qquad \hat{n}\hat{n}T=T, \tag{۷}$$

که $\vec{x}$ بردارهمدوس زیرسامانه‌ی A و T ماتریس هم‌بستگی ρ در نمایش بلوخ می‌باشد. ازاین رو یک حالت دوکیوبیتی، ناهم‌خوانی صفر دارد اگر و تنها اگر $T=0$ باشد یا $rank(T)=1$ و $\vec{x}$ متعلق به برد T باشد.

در این مقاله ابتدا تعمیمی برای معادله (۷) ارائه می شود و بر اساس آن با تعریف ماتریس چپ-همبستگی شرط لازم و کافی برای صفر بودن ناهم‌خوانی یک سیستم دلخواه $m\otimes n$ ارائه می دهیم. سپس با استفاده از آن روشی هندسی برای تعیین مقادیر ناهم‌خوانی کوانتومی پیشنهاد می‌کنیم. بهینه‌سازی موجود در تعریف را می‌توان به طور تحلیلی حل کرد و این منجر به شکلی بسته برای ناهم‌خوانی هندسی می‌شود. نکته جالب اینجا است که این مقیاس ناهم‌خوانی با کران پایین محکم بر ناهم‌خوانی هندسی که در معادله‌ی (۶) معرفی شد، منطبق می‌باشد. بدان معنا که کران پایین معرفی شده در معادله(۶) خود می‌تواند سنجه‌ای برای سنجش هم‌بستگی کوانتومی نهفته در سامانه‌های کوانتومی باشد.

۲- توصیف حالت‌های کلاسیکی-کوانتومی

در این بخش شرط لازم و کافی معرفی شده درمعادله (۷) را به سامانه‌های با ابعاد بالاتر تعمیم می‌دهیم و بر این اساس در بخش بعدی بر اساس آن یک سنجه هندسی جدید برای ناهم‌خوانی کوانتومی معرفی می‌کنیم. اینک توجه‌مان را به حالت دوقسمتی ρ روی فضای $\mathcal{H}^A\otimes\mathcal{H}^B$ معطوف کرده و مجموعه حالت‌های ناهم‌خوانی صفر را بررسی می‌کنیم.

قضیه‌ی۱: حالت دوقسمتی ρ بر $\mathcal{H}^A\otimes\mathcal{H}^B$ حالتی با ناهم‌خوانی چپ صفر است، یعنی حالتی کلاسیکی-کوانتومی است اگر و تنها اگر عملگر برافکنشی $(m-1)$ بعدی P بر فضای (m^2-1) بعدی R^{m^2-1} وجود داشته باشد به طوری که روابط زیر برقرار باشند:

$$P\vec{x}=\vec{x}, \qquad PT=T, \tag{۱۲}$$

در آن، $\vec{x}$ بردار همدوس بخش A و T ماتریس هم‌بستگی ρ می‌باشد. (برای اثبات به مرجع [۱۰] رجوع شود.) شرایط (۱۲) را می‌توان به شکل خلاصه‌ی زیر نوشت:

$$P\mathcal{T}=\mathcal{T}, \tag{۱۳}$$

که در آن، $\mathcal{T}$ ماتریسی $(m^2-1)\times n^2$ بعدی است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{T}=\sqrt{\frac{2}{m^2n}}\left(\vec{x}\quad \sqrt{\frac{2}{n}}T\right). \tag{۱۴}$$

چون $\mathcal{T}$ شامل بردار همدوس $\vec{x}$ زیرسامانه‌ی A و ماتریس هم‌بستگی T سامانه‌ی دوقسمتی $A-B$ می‌شود، ما $\mathcal{T}$ را ماتریس چپ-هم‌بستگی حالت ρ می‌نامیم.

به عنوان مثال مورد سامانه‌ی دوکیوبیتی را بررسی می‌کنیم. در این مورد، حالت کلی ناهم‌خوانی‌صفر χ توسط $\vec{x}=(p_1-p_2)\hat{n}$، $\vec{y}=(p_1\vec{\xi}_1+p_2\vec{\xi}_2)$ و $T=\hat{n}(p_1\vec{\xi}_1-p_2\vec{\xi}_2)^t$ مشخص می‌شود که در آن‌ها p_1 و p_2 احتمال‌هایی با شرط $p_1+p_2=1$ و $\hat{n}$ بردار واحد است و $\vec{\xi}_1$ و $\vec{\xi}_2$ بردارهای همدوس زیر سامانه‌ی B می‌باشند. آشکار است که شرط ناهم‌خوانی صفر معادله‌ی(۷) ارضاء می‌شود. در زیر نشان می‌دهیم که قضیه‌ی بالا را می‌توان به عنوان شرطی لازم و کافی برای ناهم‌خوانی صفر بودن حالت‌های دوقسمتی به کار برد .

نتیجه: حالت دوقسمتی ρ حالتی کلاسیکی-کوانتومی، یعنی حالتی با ناهم‌خوانی صفر است اگر و تنها اگر $rank(\mathcal{T}\mathcal{T}^t)\le m-1$ باشد.

۳- تعیین کمیت ناهم‌خوانی کوانتومی

قضیه‌ی۱ به ما توانایی معرفی سنجه‌ی جدیدی برای

ناهم‌خوانی کوانتومی می‌دهد. چون شرط (۱۳)، شرط لازم و کافی برای ناهم‌خوانی صفر بودن حالت‌ها می‌باشد، پس اندازه‌گیری هر انحراف از این شرایط را می‌توان برای تعیین کمیت ناهم‌خوانی استفاده کرد.

گزاره: برای حالت دو قسمتی ρ با ماتریس چپ-هم‌بستگی T سنجه‌ی جدید زیر را برای ناهم‌خوانی کوانتومی پیشنهاد می‌کنیم:

$$D_P(\rho) = \min_P \|\mathrm{T} - P\mathrm{T}\|^2$$

$$= \frac{2}{m\,n}\min\left\{\|\vec{x} - P\vec{x}\| + \frac{2}{n}\|T - PT\|\right\}, \qquad (۱۵)$$

که در آن، $\|.\|^2$ می‌تواند هر نرم منطقی بر فضای حالت‌ها باشد و عمل کمینه‌یابی بر روی سراسر عملگرهای برافکنشی $(m-1)$ بعدی P روی $\mathbb{R}^{m^2-1}$ گرفته شده است. در این‌جا ما $\|.\|^2$ را نرم هیلبرت-اشمیت در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در زیر نشان خواهیم داد کمینه‌سازی موجود در تعریف بالا حلی دقیق برای حالت‌های $m\otimes n$ دلخواه دارد که عبارتی بسته برای ناهم‌خوانی می‌دهد. براحتی می‌توان نشان داد که:

$$\mathrm{T}\mathrm{T}^t = \frac{2}{m^2 n}\left(\vec{x}\vec{x}^t + \frac{2}{n}TT^t\right) = \frac{2}{m^2 n}G. \qquad (۱۶)$$

و پس از انجام کمی عملیات جبری خواهیم داشت:

$$D_P(\rho) = \left[Tr\left(\mathrm{T}\mathrm{T}^t\right) - \max_{\{\hat{n}_i\}} Tr\sum_{i=1}^{m-1}\hat{n}_i^t\left(\mathrm{T}\mathrm{T}^t\right)\hat{n}_i\right]$$

$$= \left[Tr\left(\mathrm{T}\mathrm{T}^t\right) - \sum_{k=1}^{m-1}\tau_k^{\downarrow}\right] = \sum_{k=m}^{m^2-1}\tau_k^{\downarrow}, \qquad (۱۷)$$

در آن $\{\tau_k^{\downarrow}\}_{k=1}^{m^2-1}$ ویژه مقادیر $\mathrm{T}\mathrm{T}^t$ به ترتیب غیرافزایشی می‌باشند. توجه کنید که سنجه‌ی بالا بر کران پایین محکم ناهم‌خوانی هندسی (۶) منطبق می‌شود. پس رابطه‌ی زیر در حالت کلی برقرار است:

$$D_P(\rho) \le D_G(\rho). \qquad (۱۸)$$

بر این اساس می‌توان هم‌بستگی‌های کلاسیکی و کوانتومی را به صورت زیر تعریف نمود:

$$I_P(\rho) = \|\mathrm{T}\|^2 = \sum_{k=1}^{m^2-1}\tau_k^{\downarrow},\; C_P(\rho) = \max_P\|P\mathrm{T}\|^2 = \sum_{k=1}^{m-1}\tau_k^{\downarrow}. \qquad (۱۹)$$

ازا ین‌رو سنجه‌ی هم‌بستگی کوانتومی به صورت زیر می‌باشد: $D_P(\rho) = I_P(\rho) - C_P(\rho).$

اینک برخی ویژگی‌های سنجه‌ی ناهم‌خوانی بالا را بیان می‌کنیم. (i) سنجه‌ی ناهم‌خوانی بالا تنها برای حالت‌هایی با ناهم‌خوانی صفر، صفر می‌شود. (ii) برای حالت با بیشینه‌ی درهم‌تنیدگی $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m}|ii\rangle$ رابطه‌ی $D_P(\rho) = D_G(\rho) = \frac{m-1}{m}$ را داریم که مقدار بیشینه را برای این کمیت‌ها می‌دهد. (iii) $D_P(\rho)$ تحت تبدیلات یکانی محلی U_1 و U_2 که به ترتیب بر H^A و H^B انجام می‌شود، ناورداست یعنی اگر $U_1 \in SU(m)$ و $U_2 \in SU(n)$ داریم $D_P\left((U_1\otimes U_2)\rho(U_1\otimes U_2)^t\right) = D_P(\rho)$ [۱۰].

نتیجه‌گیری

در این مقاله سنجه‌ای کوانتومی برای هم‌بستگی حالت‌های دوقسمتی $m\otimes n$ ارائه دادیم. ابتدا شرط لازم و کافی برای این‌که حالت دارای ناهم‌خوانی صفر باشد ارائه نمودیم. سپس بر این اساس یک سنجه هندسی جدید برای ناهم‌خوانی کوانتومی معرفی نمودیم.

سپاسگزاری

نویسندگان از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان سپاس‌گزاری می‌نمایند.

مراجع

[1] H. Olivier and W. H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 017901 (2001)
[2] L. Henderson, and V. Vedral, *J. Phys.A* **34**, 6899 (2001).
[3] T. S. Cubitt, F. Verstraete, W. Dur, and J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett*. **91**, 037902, (2003).
[4] B. Dakic, Y. Ole Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A. Zeilinger, C. Brukner, P. Walther, *arxiv:quant-ph*,1203.1629 (2012).
[5] B. Dakic, V. Vedral, and C. Brukner, *Phys. Rev. Lett.*.**105**, 190502 (2010).
[6] S. Luo, and S. Fu, *Phys. Rev. A* **82**, 034302 (2010). S. Luo, and S. Fu, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 120401 (2011).
[7] S. Rana, P. Parashar, *Phys. Rev. A* **85**, 024102 (2012).
[8] A. S. M. Hassan, B. Lari, and P. S. Joag, *Phys. Rev. A* **85**, 024302 (2012).
[9] Xiao-Ming Lu, Jian Ma, Zhengjun Xi and Xiaoguang Wang, *Phys. Rev. A* **83**, 012327 (2011).
[10] S. J. Akhtarsenas, H. Mohammadi, S. Karimi, Z. Azmi, , “Tight Lower Bound on the Geometric Discord: A Measure of the Quantumness,” arXiv:1303.5570v2.