



بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس مهندسی و فناوری فوتونیک ایران، دانشگاه شهید چمران اهواز، خوزستان، ایران.  
۱۴-۱۲ بهمن ۱۴۰۰



## درهم تنیدگی پایدار مکانیکی ماکروسکوپی در دو سیستم اپتومکانیکی اتلاف‌گر دور از هم

میثم ستوده خیرآبادی؛ محمدکاظم توسلی؛ مهران رفیعی

گروه اپتیک و لیزر، دانشکده فیزیک، دانشگاه یزد

[meysam.setodeh@stu.yazd.ac.ir](mailto:meysam.setodeh@stu.yazd.ac.ir), [mktavassoly@yazd.ac.ir](mailto:mktavassoly@yazd.ac.ir), [mehran.rafeie@stu.yazd.ac.ir](mailto:mehran.rafeie@stu.yazd.ac.ir)

**چکیده:** در این مقاله روشی برای تولید درهم‌تنیدگی پایدار بین دو مد مکانیکی ماکروسکوپی دور از هم در سامانه‌های اپتومکانیکی با استفاده از اندازه‌گیری یک حالت بل معرفی می‌شود. دو زیرسامانه اپتومکانیکی یکسان و مستقل هستند؛ هر کدام شامل یک کاواک با آینه متحرک و یک اتم دوترازی است و به وسیله یک میدان پمپ خارجی کنترل می‌شود. با انتخاب مناسب بسامدهای اجزای سامانه، هامیلتونی موثر محاسبه می‌شود. با در نظر گرفتن اتلاف‌های اتمی، فوتونی و فونونی، تحول زمانی هر زیرسامانه و همچنین سامانه کلی بدست آمده است. با اندازه‌گیری یک حالت بل مناسب از مدهای اپتیک بر روی حالت کلی سامانه، درهم‌تنیدگی میان دو مد مکانیکی ماکروسکوپی ایجاد می‌شود. محاسبه سنج تلافی به ازای پارامترهای مناسب نشان می‌دهد که می‌توان به میزان درهم‌تنیدگی قابل توجه و پایداری دست یافت.

کلیدواژه: اندازه‌گیری حالت بل، پایداری درهم‌تنیدگی، تولید درهم‌تنیدگی، سامانه‌های اپتومکانیکی اتلاف‌گر.

## Stable macroscopic mechanical entanglement in two distant dissipative optomechanical systems

Meysam Setodeh Khairabady; Mohammad Kazem Tavassoly and Mehran Rafeie

Laser and Optics Group, Faculty of Physics, Yazd University

[meysam.setodeh@stu.yazd.ac.ir](mailto:meysam.setodeh@stu.yazd.ac.ir), [mktavassoly@yazd.ac.ir](mailto:mktavassoly@yazd.ac.ir), [mehran.rafeie@stu.yazd.ac.ir](mailto:mehran.rafeie@stu.yazd.ac.ir)

**Abstract:** In this paper, we introduce a method for the generation of stable entanglement between two remote macroscopic mechanical modes in optomechanical systems using Bell-state measurement. Two identical optomechanical systems each driven by an external pump field and comprising a cavity with a movable mirror and a two-level atom. By appropriate choice of frequencies of system's component, effective Hamiltonian is calculated. With considering atomic, photonic and phononic dissipations, the time evolution of each subsystem and also the whole system have been achieved. By measuring suitable Bell state of optical modes on the state of the whole system, entanglement between two macroscopic mechanical modes is created. Calculating concurrence measure for appropriate parameters indicates that a significant and stable degree of entanglement can be achieved.

**Keywords:** Bell-state measurement, Dissipative optomechanical systems, Entanglement generation, Entanglement stability.

## مقدمه

تولید درهم‌تنیدگی بدلیل نقش مهمی که در تکنولوژی‌های کوانتومی دارد، یکی از هدف‌های اساسی مطالعات تجربی و نظری است [۱]. امروزه سامانه‌های اپتومکانیکی به‌خاطر توانایی آن‌ها در تولید درهم‌تنیدگی‌های دوجزئی و سه‌جزئی بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند [۲، ۳]. در این سامانه‌ها از برهم‌کنش یک نوسانگر مکانیکی (آینه متحرک) و فشار تابشی کاواک اپتومکانیکی برای تولید درهم‌تنیدگی ماکروسکوپی استفاده می‌شود. یکی از روش‌های تبادل درهم‌تنیدگی، اندازه‌گیری یک حالت پل است که در سامانه‌های اپتیک و اپتومکانیکی مورد استفاده قرار گرفته است [۴]. در این مقاله نیز با استفاده از این روش، درهم‌تنیدگی بین مدهای مکانیکی از دو زیرسامانه اپتومکانیکی بررسی شده است. با انتخاب مناسب مقادیر اتلاف‌ها و دیگر پارامترهای سامانه می‌توان به درهم‌تنیدگی پایدار و قابل توجهی دست یافت.

## مدل سامانه و اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی

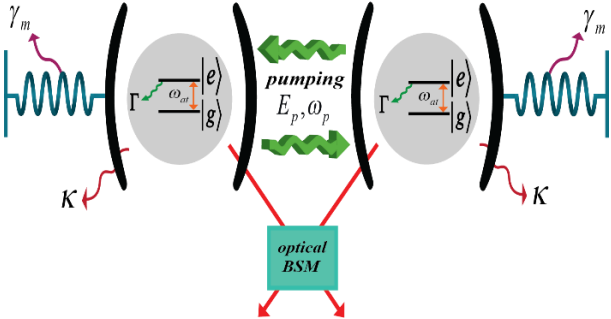
سامانه کلی مدل ما متشکل از دو زیرسامانه اپتومکانیکی یکسان می‌باشد، که هر کدام شامل یک کاواک تک‌مد با یک آینه متحرک است. هر کدام از کاواک‌های اپتومکانیکی به وسیله یک میدان پمپ خارجی با بسامد  $\omega_p$  و دامنه  $E_p$  کنترل می‌شوند. مدل در نظر گرفته شده در شکل ۱ نمایش داده شده است. در هر زیرسامانه، یک اتم دوترازی با بسامد گذار  $\omega_{at}$  و آهنگ واپاشی  $\Gamma$ ، یک میدان اپتیک تک‌مد با بسامد  $\omega_c$  و آهنگ اتلاف  $\kappa$  قرار دارد. آینه متحرک به صورت یک نوسانگر هماهنگ با بسامد  $\omega_m$  و آهنگ میرایی  $\gamma_m$  در نظر گرفته شده است. هامیلتونی هر زیرسامانه به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\hat{H} = \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_m \hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{\omega_{at}}{2} \hat{\sigma}_z - iE_p \left( \hat{a} e^{-i\omega_p t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega_p t} \right) \quad (1)$$

$$+ \Omega (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-) - G \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}),$$

که در این معادله  $\hat{a}$  ( $\hat{a}^\dagger$ ) و  $\hat{b}$  ( $\hat{b}^\dagger$ ) به ترتیب عملگرهای

نابودی (خلق) مدهای اپتیک و مکانیکی،  $\hat{\sigma}_+$ ،  $\hat{\sigma}_-$ ،  $\hat{\sigma}_z$  عملگرهای اتمی،  $\Omega$  و  $G$  به ترتیب جفت‌شدگی اتم-میدان و فونون-میدان می‌باشند.



شکل ۱: مدل سامانه شامل دو کاواک اپتومکانیکی با آینه متحرک که هر کدام شامل یک اتم دوترازی است و با یک میدان خارجی کنترل می‌شوند.

به کمک عملگر یکانی  $R(t) = e^{-i\hat{H}_0 t}$  (که  $\hat{H}_0$  هامیلتونی آزاد زیرسامانه است)، هامیلتونی برهم‌کنش در تصویر برهم‌کنش مشخص می‌شود:

$$\hat{H}_I = \hat{R}(t) \hat{H} \hat{R}^\dagger(t) - i\hat{R}(t) \frac{\partial}{\partial t} \hat{R}^\dagger(t). \quad (2)$$

با انتخاب شرایط تشدید  $\omega_p = \omega_{at}$ ،  $\omega_c = \omega_m + \omega_{at}$  و به کمک روش ارائه شده در مرجع [۵] می‌توان هامیلتونی موثر هر زیرسامانه را به صورت زیر بدست آورد:

$$\hat{H}_{eff} = \Omega G (\hat{a}^\dagger \hat{b} \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{\sigma}_+) - G^2 (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 + i\Omega E_p (\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+) + iG E_p (\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{a} \hat{b}^\dagger) - \Omega^2 (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-), \quad (3)$$

در این رابطه ضریب  $1/\omega_m$  بدلیل ثابت بودن و موثر نبودن بر دینامیک درهم‌تنیدگی حذف شده است. جمله اول در رابطه (۳) نشان دهنده برهم‌کنش سه‌جزئی است که نقش مهمی در ایجاد درهم‌تنیدگی‌های دوجزئی و سه‌جزئی ایفا می‌کند. برای وارد کردن اتلاف و بررسی واقعی‌تر سامانه، با رویکرد پدیده‌شناسی، هامیلتونی زیر را معرفی می‌کنیم [۶، ۷]:

$$\hat{H}'_{eff} = \hat{H}_{eff} - \frac{i\Gamma}{2} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- - \frac{i\kappa}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{i\gamma_m}{2} \hat{b}^\dagger \hat{b}. \quad (4)$$

با در نظر گرفتن حالت اولیه هر زیرسامانه به صورت زیر:

$$|\psi(0)\rangle = (\cos \theta |e\rangle + \sin \theta |g\rangle) \otimes |1_f, 0_m\rangle, \quad (5)$$

و به کمک معادله شرودینگر وابسته به زمان، کت حالت

$$\rho_{m_1, m_2}(t) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \Lambda_1(t) & 0 & 0 & \Lambda_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_3(t) & 0 & 0 & \Lambda_4(t) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

که  $N = \text{Tr}(|\psi_p\rangle\langle\psi_p|)$  و عناصر ماتریس نیز در زیر آمده است:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(t) &= |D_1|^2 + |D_2|^2 + |D_3|^2 + |D_4|^2 \\ \Lambda_2(t) &= D_1 D_5^* + D_2 D_6^* + D_3 D_7^* + D_4 D_8^* \\ \Lambda_3(t) &= D_5 D_1^* + D_6 D_2^* + D_7 D_3^* + D_8 D_4^* \\ \Lambda_4(t) &= |D_5|^2 + |D_6|^2 + |D_7|^2 + |D_8|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

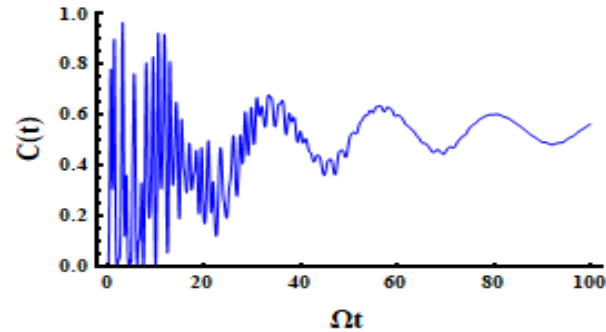
سنجه تلاقی با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$C(t) = \text{Max} \left( 0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4} \right), \quad (13)$$

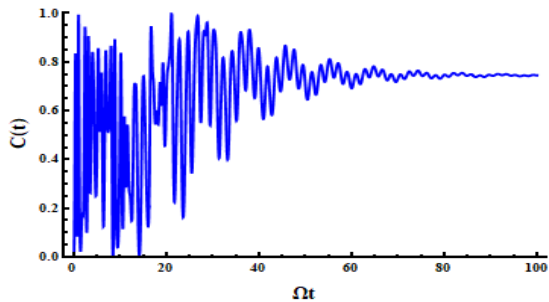
که در این رابطه  $\lambda_i (i=1, \dots, 4)$  ویژه‌مقادیر ماتریس زیر هستند، که به ترتیب کاهشی نوشته شده است:

$$\hat{\rho}_{m_1, m_2}(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y) \hat{\rho}_{m_1, m_2}^*(\hat{\sigma}_y \otimes \hat{\sigma}_y), \quad (14)$$

که  $\hat{\sigma}_y$  ماتریس پائولی می‌باشد. در ادامه نمودارهای تلاقی بین دو مد مکانیکی بر حسب زمان بهنجار شده  $\Omega t$  در شکل‌های ۷-۲ رسم شده است که به علت کمبود جا فقط به ذکر پارامترها در هر شکل بسنده کردیم.



شکل ۲:  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $G = \sqrt{2}\Omega$ ,  $E_p = \frac{\Omega}{2}$ ,  $\Gamma = \gamma_m = 0.2\Omega$ ,  $\kappa = 0.4\Omega$



شکل ۳:  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $G = \sqrt{2}\Omega$ ,  $E_p = \Omega$ ,  $\Gamma = \gamma_m = 0.2\Omega$ ,  $\kappa = 0.4\Omega$

وابسته به زمان هر زیرسامانه و هم‌چنین حالت کلی سامانه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_1 &= c_1 |1_{f_1}, 0_{m_1}, e_1\rangle + c_2 |1_{f_1}, 0_{m_1}, g_1\rangle \\ &+ c_3 |0_{f_1}, 1_{m_1}, e_1\rangle + c_4 |0_{f_1}, 1_{m_1}, g_1\rangle, \\ |\psi(t)\rangle_2 &= d_1 |1_{f_2}, 0_{m_2}, e_2\rangle + d_2 |1_{f_2}, 0_{m_2}, g_2\rangle \\ &+ d_3 |0_{f_2}, 1_{m_2}, e_2\rangle + d_4 |0_{f_2}, 1_{m_2}, g_2\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

$$|\Psi(t)\rangle = |\psi(t)\rangle_1 \otimes |\psi(t)\rangle_2.$$

بدلیل پیچیده بودن روابط از بیان شکل صریح آن‌ها صرف نظر می‌کنیم. حال برای ایجاد درهم‌تنیدگی مکانیکی مورد نظر، حالت بل اپتیکی زیر را معرفی می‌کنیم [۸، ۹]:

$$|\phi\rangle_{f_1 f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_{f_1}, 0_{f_2}\rangle - |1_{f_1}, 1_{f_2}\rangle). \quad (7)$$

روش اندازه‌گیری حالت بل به صورت اثر عملگر تصویر ساخته شده با حالت بل روی حالت کلی سامانه به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$|\phi\rangle_{f_1 f_2} \langle\phi| \Psi(t)\rangle = |\phi\rangle_{f_1 f_2} \otimes |\psi_p\rangle, \quad (8)$$

که  $|\psi_p\rangle$  با رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\psi_p\rangle &= D_1 |1_{m_1}, 1_{m_2}, e_1, e_2\rangle + D_2 |1_{m_1}, 1_{m_2}, e_1, g_2\rangle \\ &+ D_3 |1_{m_1}, 1_{m_2}, g_1, e_2\rangle + D_4 |1_{m_1}, 1_{m_2}, g_1, g_2\rangle \\ &+ D_5 |0_{m_1}, 0_{m_2}, e_1, e_2\rangle + D_6 |0_{m_1}, 0_{m_2}, e_1, g_2\rangle \\ &+ D_7 |0_{m_1}, 0_{m_2}, g_1, e_2\rangle + D_8 |0_{m_1}, 0_{m_2}, g_1, g_2\rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

$$D_1 = \frac{c_3 d_3}{\sqrt{2}}, D_2 = \frac{c_3 d_4}{\sqrt{2}}, D_3 = \frac{c_4 d_3}{\sqrt{2}}, D_4 = \frac{c_4 d_4}{\sqrt{2}},$$

$$D_5 = -\frac{c_1 d_1}{\sqrt{2}}, D_6 = -\frac{c_1 d_2}{\sqrt{2}}, D_7 = -\frac{c_2 d_1}{\sqrt{2}}, D_8 = -\frac{c_2 d_2}{\sqrt{2}}.$$

در ادامه سنجه تلاقی را برای ارزیابی میزان درهم‌تنیدگی حالت حاصل شده محاسبه می‌کنیم. با استفاده از  $|\psi_p\rangle$  در (۹) ماتریس چگالی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{\rho} = \frac{|\psi_p\rangle\langle\psi_p|}{\text{Tr}(|\psi_p\rangle\langle\psi_p|)}. \quad (10)$$

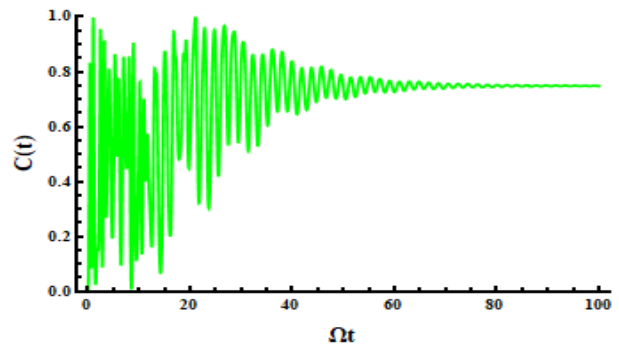
با گرفتن رد روی اتم‌های ۱ و ۲ و به کمک پایه‌های  $|1_{m_1}, 1_{m_2}\rangle$ ،  $|1_{m_1}, 0_{m_2}\rangle$ ،  $|0_{m_1}, 1_{m_2}\rangle$  و  $|0_{m_1}, 0_{m_2}\rangle$  می‌توان ماتریس چگالی کاهش‌یافته برای دو مد مکانیکی از دو زیرسامانه را به صورت زیر بدست آورد:

### بحث و نتیجه‌گیری

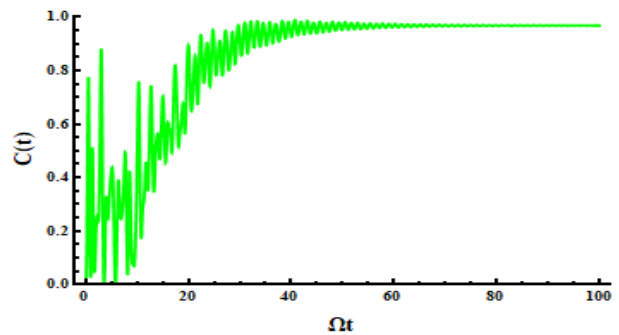
در این بخش شرایط مناسب برای دستیابی به میزان درهم‌تنیدگی بالا و پایدار مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل‌های ۲ و ۳ تلاقی به ترتیب به ازای دامنه پمپ  $E_p = \Omega/2$  و  $E_p = \Omega$  رسم شده است. با افزایش دامنه پمپ، میزان درهم‌تنیدگی افزایش و افت و خیزها کاهش می‌یابد و تقریباً بعد از گذشت ۷۰ واحد زمان بهنجار شده در شکل ۳، درهم‌تنیدگی پایدار  $C(t) \approx 0.75$  قابل دسترس است. در شکل ۵ مشاهده می‌کنیم که با افزایش دامنه پمپ به  $E_p = 2\Omega$  و اتلاف فوتونی به  $\kappa = 0.4\Omega$  نسبت به شکل ۴، درهم‌تنیدگی پایدار تقریباً به میزان  $0.2/2$  افزایش می‌یابد و به مقدار بیشینه خود می‌رسد. برای بررسی اثر اتلاف فوتونی شکل‌های ۶ و ۷ رسم شده است. مشاهده می‌کنیم که افزایش اتلاف فوتونی از  $\gamma_m = 0.01\Omega$  به  $\gamma_m = 0.3\Omega$  اثر مثبتی در پایدارسازی درهم‌تنیدگی دارد. در شکل ۷ با انتخاب یک کاواک با ضریب کیفیت نسبتاً بالا و میزان اتلاف فوتونی  $\gamma_m = 0.3\Omega$ ، به درهم‌تنیدگی پایدار  $C(t) \approx 0.25$  دست می‌یابیم. نتایج بدست آمده نشان‌دهنده این است که برخلاف بسیاری از موارد که اتلاف نقش مخربی دارد، اما در مدل ما اتلاف بیشتر می‌تواند نقش مثبتی بر میزان پایداری درهم‌تنیدگی داشته باشد. بنابراین مشاهده می‌شود که با انتخاب مناسب پارامترهای مدل می‌توان به درهم‌تنیدگی پایدار و قابل توجهی دست یافت.

### مرجع‌ها

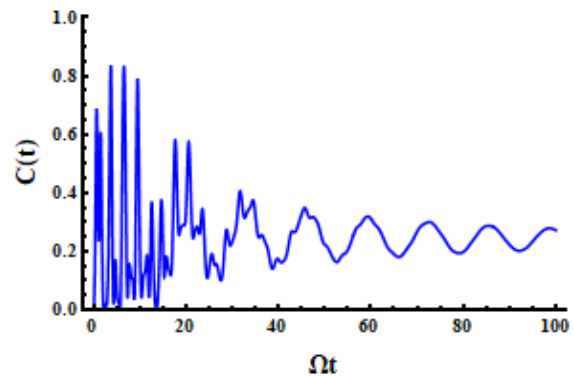
- [1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, "Quantum entanglement", Rev. Mod. Phys., Vol. 81, pp. 865, 2009.
- [2] P. Meystre, "A short walk through quantum optomechanics", Ann. Phys., Vol. 525, pp. 215, 2013.
- [3] Y. D. Wang, S. Chesi, A. A. Clerk, "Bipartite and tripartite output entanglement in three-mode optomechanical systems", Phys. Rev. A, Vol. 91, pp. 013807, 2015.
- [4] M. A. Fasihi, B. Mojaveri, "Entanglement protection in Jaynes-Cummings model", Quantum Inf. Process., Vol. 18, pp. 75, 2019.
- [5] Y. X. Zeng, J. Shen, M. S. Ding, C. Li, "Macroscopic Schrödinger cat state swapping in optomechanical system", Opt. Express, Vol. 28, pp. 9587, 2020.
- [6] C. D. Fidio, W. Vogel, "Entanglement signature in the mode structure of a single photon", Phys. Rev. A, Vol. 79, pp. 050303, 2009.
- [7] D. Y. Wang, C. H. Bai, S. Liu, S. Zhang, H. F. Wang, "Photon blockade in a double-cavity optomechanical system with nonreciprocal coupling", New J. Phys., Vol. 22, pp. 093006, 2020.
- [8] M. Ghasemi, M. K. Tavassoly, A. Nourmandipour, "Dissipative entanglement swapping in the presence of detuning and Kerr medium: Bell state measurement method", Eur. Phys. J. Plus, Vol. 132, pp. 531, 2017.
- [9] Q. H. Liao, Q. Zhang, N. R. Zhou, J. Korean, "Entanglement swapping in two independent atom-cavity-optomechanical systems", Phys. Soc., Vol. 69, pp. 505, 2016.



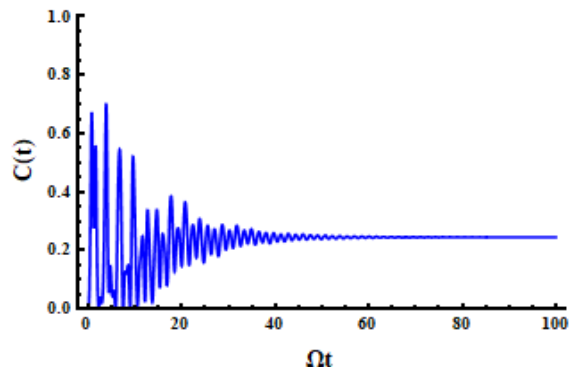
شکل ۴:  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $G = \sqrt{2}\Omega$ ,  $E_p = \Omega$ ,  $\Gamma = \gamma_m = \kappa = 0.2\Omega$



شکل ۵:  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $G = \sqrt{2}\Omega$ ,  $E_p = 2\Omega$ ,  $\Gamma = \gamma_m = 0.2\Omega$ ,  $\kappa = 0.4\Omega$



شکل ۶:  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $G = \Omega$ ,  $E_p = \frac{\Omega}{2}$ ,  $\Gamma = 0.3\Omega$ ,  $\gamma_m = 0.01\Omega$ ,  $\kappa = 0.001\Omega$



شکل ۷:  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $G = \Omega$ ,  $E_p = \frac{\Omega}{2}$ ,  $\Gamma = 0.3\Omega$ ,  $\gamma_m = 0.3\Omega$ ,  $\kappa = 0.001\Omega$