بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
خوزستان، ایران.
۱۴-۱۲ بهمن ۱۴۰۰

ویژگی غیرکلاسیکی نوسانگر هماهنگ در نمایش هوسیمی و خصلت غیرخطی پتانسیل

پروین، صادقی

دانشکده فنی و مهندسی مرند، دانشگاه تبریز، تبریز

psadeghi@tabrizu.ac.ir

چکیده - در این مقاله با بررسی سیستم نوسانی کوانتومی با حل دقیق، به نقش غیرخطی پتانسیل در ایجاد ویژگی‌های غیرکلاسیکی در این سیستم‌ها می‌پردازیم. رفتار غیرکلاسیکی حالت تحت بررسی با استفاده از شاخص غیرکلاسیکی η که بر اساس تداخل بنا نهاده شده است در نمایش همیشه مثبت هوسیمی بررسی می‌شود. ما با استفاده از پارامترهای غیرکلاسیکی و غیرخطی با کمک پتانسیل عمومی درجه ششم تأیید می‌کنیم که ویژگی غیرخطی منبعی برای تولید خصلت غیرکلاسیکی است.

کلید واژه- پارامتر غیرکلاسیکی، پتانسیل غیرخطی، تابع هوسیمی، حالت پایه نوسانگر هماهنگ.

The nonclassical property of the Harmonic Oscillator in the Husimi Representation and the Nonlinear Feature of the Potential

Parvin Sadeghi

Marand Faculty of Engineering, University of Tabriz

psadeghi@tabrizu.ac.ir

Abstract- In this paper, considering the exactly solvable quantum oscillator system, we address the role played by the nonlinearity of their potential in the establishment of nonclassical features. The nonclassical behavior of the states under consideration is investigated using the nonclassical indicator η, which is based on the interference, in the always positive Husimi representation. We focus on the nonclassicality-nonlinearity relation using the generic sixth-order potential confirming the idea that nonlinearity is a resource for the generation of nonclassicality.

Keywords: Ground state of harmonic oscillator. Husimi function, Nonclassicality indicator, Nonlinear potential.

مقدمه

در قلب فناوری‌های کوانتومی این واقعیت نهفته است که سیستم‌های مکانیک کوانتومی، بدون هیچ نمونه کلاسیکی، ویژگی‌هایی را نشان می‌دهند که ممکن است به عنوان منابعی برای انجام کارهای خاص بهتر یا سریع‌تر از قلمرو کلاسیک استفاده شوند [۱]. اخیراً، نشان داده شده است که گنجاندن ویژگی غیرخطی در پتانسیل نوسان‌گر، احتمال جدیدی را برای ایجاد حالت‌های غیرکلاسیک آشکار می‌کند [۲]. ارزیابی کمی دقیق از پیوند بین غیرخطی بودن و غیر کلاسیک بودن هنوز وجود ندارد. هدف از این کار بررسی دقیق این ایده است که غیرخطی بودن یک منبع کلی برای تولید غیرکلاسیک بودن در سیستم‌های بوزونی حالت ترکیب شده با نوسانگرهای ناهماهنگ است. رابطه کمی رفتار غیرخطی یک سیستم نوسانی و ظهور خصلت غیرکلاسیکی اخیراً در زمینه تشدیدکننده‌های نانومکانیکی، برای مدل نوسان‌گر دافینگ آزمایش شده است [۳]. همچنین، در طراحی آشکارساز تک فوتونی غیرمخرب که در حوزه مایکروویو بر اساس یک فراماده غیرخطی ضعیف عمل می‌کند، از ویژگی غیرخطی پتانسیل استفاده شده است [۴]. در این مقاله، این هدف برای پتانسیل عمومی مرتبه ششم دنبال می‌شود. در بخش بعد شاخص غیرکلاسیکی η که برای مشخص کردن میزان غیرکلاسیکی بودن حالت بر اساس اثرات تداخلی که به صورت نوسانات در توابع توزیع حقیقی ظاهر می‌شوند را معرفی می‌کنیم [۵] و همچنین شاخص غیرخطی که بر اساس معیار آنتروپی غیر گاوسی [۶] معرفی می‌شود. در بخش سوم ما به پتانسیل ناهماهنگ عمومی (متقارن) با استفاده از اختلال‌های مرتبه چهارم و ششم هماهنگ می‌پردازیم و ارتباط غیرکلاسیکی و خطی بودن حالت‌های مورد بررسی تحقیق می‌شود. آخرین بخش نیز به نتیجه‌گیری اختصاص خواهد یافت.

ویژگی غیرکلاسیکی حالت و غیرخطی پتانسیل

شاخص صادقی: این شاخص که با نماد η نشان داده شده است، توسط صادقی و همکارانش معرفی شده و به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]:

$$\eta = \frac{\sum_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}[|F_{ij}(q,p)|-F_{ij}(q,p)]dqdp}{\sum_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}[|F_{ij}(q,p)|+F_{ij}(q,p)]dqdp} \qquad (۱)$$

در رابطه فوق هر تابع توزیع حقیقی که از برهم نهی دو یا چند حالت به وجود آمده را می‌توان به جمله‌های F_{ij} تقسیم کرد. برای مثال در نمایش هوسیمی که $F_{ij} = H_{ij}$ است و برای $\psi(q,t) = \varphi_1(q,t) + \cdots + \varphi_n(q,t)$ تابع هوسیمی

$$H_{ij}(q,p) = \frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dxdq'dp'[\varphi_i^*(q'-\frac{x}{2}) \varphi_i^*(q'+\frac{x}{2})e^{-ip'x-(q'-q)^2-(p'-p)^2}] \qquad (۲)$$

است. یکی از مزایای این شاخص این است که بر اساس اثرات تداخل تعریف شده است. بنابراین علاوه بر اینکه در نمایشی نظیر ویگنر که دارای مقادیری منفی است کاربرد دارد بلکه برای تابع توزیع همواره مثبت هوسیمی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بخش بعد، این شاخص برای نوسانگرها با اختلال‌های چند جمله‌ای در نمایش هوسیمی بررسی می‌شود.

شاخص غیرخطی پتانسیل: برای کمی کردن ویژگی *غیرخطی* پتانسیل یک بعدی، ما یک پتانسیل عمومی $V(x)$ را در نظر می‌گیریم و حالت پایه هامیلتونی مربوطه را با $|\phi\rangle$ نشان می‌دهیم. از لحاظ کمی ویژگی غیرخطی را با استفاده از انتروپیک غیرگاوسی δ_E تعیین می‌کنیم، چون حالت پایه خالص است و σ ماتریس کوواریانس حالت پایه است، بنابراین شاخص غیرخطی به صورت [۷]:

$$\Delta_{NG}[V] = \delta(|\phi\rangle\langle\phi|) = h(\sqrt{\det\sigma}) \qquad (۳)$$

تعریف می‌شود، که

$$h(x)=(x+\frac{1}{2})Ln(x+\frac{1}{2})-(x-\frac{1}{2})Ln(x-\frac{1}{2}) \qquad (۴)$$

در این روش، Δ_{NG} ویژگی اندازه‌گیری غیرگاوسی را به ارث می‌برد و تحت تبدیلات متقارن ثابت نیست [۷]. این بدان معنی است که Δ_{NG} همان غیرخطی بودن را به نوسانگرهایی که جابجا یا در فضای فاز چرخانده یا چلانده می‌شوند، اختصاص می‌دهد، که یک ویژگی معقول برای اندازه‌گیری غیرخطی بودن است.

نوسانگرها با اختلال‌های چندجمله‌ای

حال به اختلال عمومی دو پارامتر پرداخته می‌شود، بنابراین یک سیستم فیزیکی متشکل از یک نوسان‌گر هماهنگ یک بعدی با اختلال‌های متناسب با q^4 و q^6 را مطالعه می‌کنیم. هامیلتونی این سیستم به‌صورت:

$$H=\frac{1}{2}(p^2+q^2)+\varepsilon_4 q^4+\varepsilon_6 q^6 \qquad (۵)$$

است. از آنجا که این مدل دقیقاً قابل حل نیست، خواص سیستم با استفاده از نظریه اختلال مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای اینکه از حالت‌های پایه این هامیلتونی‌ها اطلاعاتی به‌دست آوریم ما از مرتبه اول نظریه آشفتگی مستقل از زمان استفاده می‌کنیم [۷]. حالت به شکل ریاضی $|\psi\rangle=\sum_{n=0}^{3}\gamma_{2n}|2n\rangle$ نوشته می‌شود. که $|n\rangle$ حالت عددی نوسان‌گر هماهنگ را مشخص می‌کند و γ_{2n} نیز ضرایب بهنجار شده هستند که در ادامه بیان شده‌اند. در ادامه بحث ابتدا شاخص غیرکلاسیکی η و سپس شاخص غیرخطی را بررسی می‌شود.

شاخص غیرکلاسیکی: با استفاده از نظریه اختلال مرتبه اول، حالت پایه را می‌توان با برهم‌نهی محدود از حالت‌های فوک تقریب زد، تابع حالت برای حالت پایه اختلالی به شکل ریاضی:

$$|\psi\rangle=|0\rangle+\varepsilon\sum_{k\neq 0}|k\rangle\frac{V_{k0}}{E_k-E_0} \qquad (۵)$$

است که $V_{kn}=\langle n^{(0)}|V|k^{(0)}\rangle$ و V برابر با آشفتگی $\varepsilon_4 q^4+\varepsilon_6 q^6$ است. ضرایب بهنجار شده به صورت $\gamma_0=\frac{1}{c}$ ،$c=\frac{\sqrt{(96+117\varepsilon_4^2)+945\varepsilon_4\varepsilon_6+2055\ \varepsilon_6^2}}{4\sqrt{6}}$ ،$\gamma_6=$ $-\sqrt{5}\gamma_0\varepsilon_6$ ،$\gamma_2=-\frac{\gamma_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{45}{4}\varepsilon_6+3\varepsilon_4\right)$ و $\gamma_4=$ $-\gamma_0\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{15}{2}\varepsilon_6+\varepsilon_4\right)$ است. همچنین با استفاده از رابطه ۲ می‌توان تابع توزیع هوسیمی را محاسبه نمود.

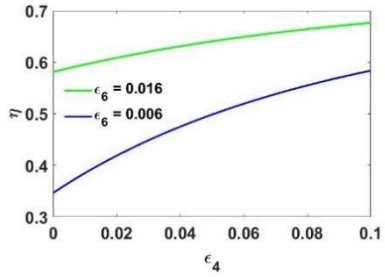
$$\begin{aligned}H(q,p)=&\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(q^2+p^2)}[\gamma_0^2\frac{1}{2}+\gamma_2^2\frac{1}{16}(q^2+p^2)^2\\&+\gamma_4^2\frac{1}{768}(q^2+p^2)^4+\gamma_6^2\frac{1}{92160}(q^2+p^2)^6\\&-\gamma_0\gamma_2\frac{\sqrt{2}}{4}(q^2-p^2)+\gamma_0\gamma_4\frac{\sqrt{6}}{48}(q^4-p^4-6qp)\\&+\gamma_0\gamma_6\frac{\sqrt{5}}{480}(q^6-p^6-15q^2p^4+15q^4p^2)\\&+\gamma_2\gamma_4\frac{\sqrt{3}}{96}(p^2-q^2)(p^2+q^2)^2+\gamma_6\gamma_4\frac{\sqrt{30}}{23040}\\&\times(q^2-p^2)(p^2+q^2)^4+\gamma_2\gamma_6\frac{\sqrt{10}}{1920}(p-q+\sqrt{2}q)\\&\times(q-p+\sqrt{2}q)(q+p+\sqrt{2}q)(\sqrt{2}q-q-p)\\&\times(p^2+q^2)^2\end{aligned} \qquad (۶)$$

شکل ۱ شاخص η را بر حسب پارامتر اختلال ε_4 و با دو مقدار ثابت پارامتر اختلال ε_6 نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش یکی از پارامترهای اختلال ε_4 یا ε_6 و ثابت بودن پارامتر اختلال دومی مقدار شاخص η که بیان‌گر میزان غیرکلاسیکی بودن حالت مورد نظر است، افزایش می‌یابد.

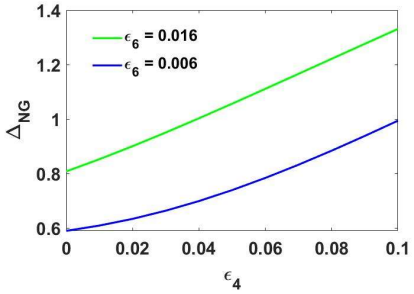
شاخص غیرخطی: از حالت پایه آشفته در معادله ۵ میزان غیرخطی بودن پتانسیل اختلال محاسبه می‌شود. ماتریس کوواریانس مرتبط با $|\psi\rangle$ را می‌توان بدین ترتیب نوشت:

$$\sigma^{pol}=\begin{bmatrix}\frac{1+2\langle\hat{a}^2\rangle+2\langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle-4\langle\hat{a}\rangle^2}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-2\langle\hat{a}^2\rangle+2\langle\hat{a}^+\hat{a}\rangle}{2}\end{bmatrix} \quad (۷)$$

که $\hat{a}$ و $\hat{a}^+$ عملگرهای پایین برنده و بالابرنده هستند. بنابراین با استفاده از σ^{pol} ک محاسبه ساده نشان می‌دهد که پارامتر غیرخطی Δ_{NG} به پارامترهای اختلال بستگی دارد. در شکل ۲ پارامتر غیرخطی بر حسب ضریب اختلال ϵ_6 و با دو مقدار ثابت ضریب اختلال ϵ_4 نشان می‌دهد و مشاهده می‌شود که با افزایش یکی از پارامترهای اختلال شاخص Δ_{NG} که بیان‌گر میزان غیرخطی بودن پتانسیل مورد نظر است، افزایش می‌یابد. با مقایسه شکل ۱ و ۲ می‌توان پی‌برد که این دو شاخص رفتار یکسانی دارند و رفتار غیرکلاسیکی سیستم در این حالت، نشان دهنده ویژگی غیرخطی بودن پتانسیل است.



شکل۱: شاخص غیرکلاسیکی η در نمایش هوسیمی برای حالت مختل شده برحسب ضریب اختلال ϵ_4 و برحسب ضریب ϵ_6 با مقادیر ثابت ۰/۰۰۶ و ۰/۰۱۶ .



شکل۲: شاخص غیرخطی Δ_{NG} برحسب ضریب اختلال ϵ_4 و برحسب ضریب ϵ_6 با مقادیر ثابت ۰/۰۰۶ و ۰/۰۱۶.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به نقشی که غیرخطی بودن پتانسیل عمومی درجه ششم در تولید غیرکلاسیک بودن در حالت پایه آن بازی کرده پرداخته و نشان داده شده که غیرخطی بودن در تولید غیرکلاسیکی تابع توزیع هوسیمی نقشی اساسی دارد. البته با شاخص غیرکلاسیکی η با هر تابع توزیع حقیقی ازجمله هوسیمی نیز می‌توان این ویژگی را به راحتی نشان داد. نتایج به دست آمده در این مقاله مبنی بر اینکه غیرخطی بودن یک پتانسیل از نظر کمی با غیرکلاسیک بودن حالت پایه آن مرتبط است با انتظارات ارائه شده در مرجع [۷] همخوانی دارد، و بنابراین، ویژگی غیرخطی پتانسیل ممکن است به عنوان منبعی برای ایجاد خصلت غیرکلاسیکی حالت مورد بررسی در نظر گرفته شود.

مرجع‌ها

[1] A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] K .Park, P .Marek, R .Filip, “Nonlinear potential of a quantum oscillator induced by single photons”, Phys. Rev. A, 90, 1, 013804, 2014.

[3] B. Teklu, A. Ferraro, M. Paternostro, M. G. A. Paris, “Nonlinearity and nonclassicality in a nanomechanical resonator”, EPJ Quantum Technol. 2, 16, 2015.

[4] A. L. Grimsmo, B. Royer, J. M. Kreikebaum, Y. Ye, K. OBrien, I. Siddiqi, and A. Blais, “Quantum Metamaterial for Broadband Detection of Single Microwave Photons” *Phys. Rev. Applied*, 15, 3, 034074, 2021

[5] P. Sadeghi, S. Khademi, S. Nasiri, “Nonclassicality indicator for the real phase-space distribution functions”, Phys. Rev. A, 82, 1, 012102, 2010.

[6] M. G. Genoni and M. G. A. Paris, “Quantifying non-Gaussianity for quantum information”, Phys. Rev. A. 82, 5. 052341, 2010.

[7] F. Albarelli, A. Ferraro, M. Paternostro, M. G. A. Paris, “Nonlinearity as a resource for nonclassicality in anharmonic systems”, Phys. Rev. A, 93, 3, 032112, 2016.

با سپاس فراوان از پیشنهادهای اصلاحی و نقطه نظرات داوران گرامی، موارد ذکر شده به صورت زیر اصلاح گردید:

۱- شاخص ارایه شده در مقاله به عنوان معادله ۱ در مرجع ٤ وجود ندارد و در مقاله دیگری وجود دارد. این مرجع اصلاح گردد .
Sadeghi, Parvin, Siamak Khademi, and Sadollah Nasiri. "Nonclassicality indicator for the real phase-space distribution functions." Physical Review A 82.1 (2010): 012102.
با تشکر از دقت داور محترم، در این مرجع اشتباه نوشتاری رخ داده بود و مرجع ۴ اصلاح گردید.(بعد از اضافه شدن مرجع ۳، مرجع ۴ به ۵ تغییر یافته است.)

۲- فرمول ۱ اشتباه تایپ شده است.
در معادله (۱) علامت‌های پرانتز و قدرمطلق اصلاح شد.

۳- واژه های متعارف در فیزیک به صورت متداول نوشته شود. مانند هامیلتونی، تابع گاوسی، فناوری های کوانتومی.
در متن مقاله کلمه همیلتونین به هامیلتونی، گوسینی به گاوسی و فن‌آوری‌های کوانتوم به فناوری‌های کوانتومی تبدیل شدند.

٤- کلمه های زیر نیاز به اصلاح دارند: اسکوییز ، نرمالایز، هارمونیک، ... لازم است تبدیل به چلانده، بهنجار شده، هماهنگ، ... شوند.
در متن مقاله کلمات اسکوییز به چلانده، نرمالایز به بهنجار شده و هارمونیک به هماهنگ تغییر یافتند.

۵- بر اساس استاندارد ارسال مقاله برای کنفرانس، عنوان مقاله ها در مراجع نوشته شود .
عنوان و شماره مقالات در بخش مراجع اضافه گردید. به دلیل محدود تعداد صفحات، چند جمله از بخش مقدمه و بخش دوم قسمت شاخص غیرخطی پتانسیل و زیرنویس شکلها حذف گردید.

٦- متن مقاله نیاز به ویرایش نگارشی دارد.
در متن مقاله
در بخش مقدمه جمله بعد از رفرنس [۴] جمله به صورت سوم شخص نوشته شده است.
در بخش نوسانگرها با اختلال‌های چندجمله‌ای، جمله اول به صورت سوم شخص نوشته شده است.
همچنین در بخش نتیجه گیری، جملات به صورت سوم شخص تغییر یافت.
در زیرنویس شکلها اعداد به صورت فارسی نوشته شدند.

اصلاحیه

یک یا دو رفرنس جدیدتر در این راستا به مراجع اضافه گردد.

مرجع ۴ در بخش مقدمه به مقاله اضافه گردید.
Arne L. Grimsmo, Baptiste Royer, John Mark Kreikebaum, Yufeng Ye, Kevin O'Brien, Irfan Siddiqi, and Alexandre Blais, "Quantum Metamaterial for Broadband Detection of Single Microwave Photons" *Phys. Rev. Applied*, **15**, 034074, 2021