

با سپاس فراوان از پیشنهادهای اصلاحی و نقطه نظرات داوران گرامی، موارد ذکر شده به صورت زیر اصلاح گردید:

۱- اشکالات تایپی موجود در متن بازبینی و اصلاح شوند.

با تشکر از دقت داور محترم، اشتباهات نوشتاری تصحیح گردیده و با رنگ قرمز مشخص شده است.

۲- انگلیسی نام افراد ذکر شده در متن، زیرنویس شوند.

انگلیسی نام افراد ذکر شده در متن، زیرنویس شدند.

۳- نحوه محاسبه خود آنتروپی تسالیس در انتها گویا و روشن بیان نشده و فقط تابع ویگنر و

هوسیمی بیان شده است.

برای انتقال بهتر مطلب در این مورد در سه بخش مقدمه، شاخص غیر کلاسیکی و آنتروپی تسالیس،

نوسانگرها با اختلال‌های چند جمله‌ای مطالبی اضافه شده است و همچنین در بخش مراجع، مراجع ۳ تا

۵ جابجا شده است. مطالب تغییر یافته هایلایت شده است.

۴- متن از نظر نگارشی خوب است اما جزئیاتی در تطبیق چکیده فرسی و انگلیسی وجود دارد

که رفع آنها ویرایش مقاله را بهبود می بخشد. بعضی اشکالات نگارشی در متن چکیده

انگلیسی به چشم می خورد که باید رفع شوند.

متن چکیده انگلیسی تصحیح گردید.

۵- بعضی فشرده گوئی ها به علت گنجاندن مقاله در صفحات محدود است که به ارزشمندی

جزئیات لطمه وارد کرده است. در ارائه، ارائه جزئیات بیشتری برای شنونده و خواننده ضروری

است.

با تشکر از پیشنهاد بجا و ارزشمند داور محترم، موقع ارائه، مطالب به صورت مبسوط ارائه خواهد شد.



بیست و هشتمین کنفرانس اپتیک و
فوتونیک ایران و چهاردهمین کنفرانس
مهندسی و فناوری فوتونیک ایران،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
خوزستان، ایران.
۱۴-۱۲ بهمن ۱۴۰۰



آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی برای حالت نوسانگر اختلالی

پروین، صادقی

دانشکده فنی و مهندسی مرند، دانشگاه تبریز، تبریز

psadeghi@tabrizu.ac.ir

چکیده - در نظریه اطلاعات کوانتومی، آنتروپی مفهوم کلیدی بوده و کاربردهای وسیعی دارد همچنین مقدار آن میزان عدم قطعیت در حالت فیزیکی مورد بررسی را توصیف می کند. در این مقاله میزان اطلاعات به دست آمده برای حالت نوسانگر هماهنگ مختل شده با پتانسیل عمومی مرتبه ششم در نمایش های ویگنر و هوسیمی بررسی می شود، بنابراین از شاخص نافزونفر آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی بر اساس توابع توزیع ویگنر و هوسیمی استفاده شده است. در نهایت مقایسه ای مابین شاخص غیر کلاسیکی و آنتروپی های فوق صورت گرفته است و شاخص نافزونفر آنتروپی تسالیس مناسب مشخص شده است.

کلید واژه- آنتروپی تسالیس، حالت مختل شده نوسانگر **هماهنگ**، شاخص غیر کلاسیکی، تابع ویگنر، تابع هوسیمی.

The Tsallis Entropy in the Quantum Phase Space for the Perturbated Oscillator State

Parvin Sadeghi

Marand Faculty of Engineering, University of Tabriz

psadeghi@tabrizu.ac.ir

Abstract- Entropy is the most important key in quantum information theory. It measures the order of uncertainty of the physical states of interest. In this paper, the amount of information obtained for the perturbated harmonic oscillator with the generic sixth-order potential in the Wigner and Husimi representations is investigated, therefore, a nonextensive indicator of the Tsallis entropy in the quantum phase space has been utilized on the Wigner and Husimi representation. Finally, a comparison between these entropies and a nonclassical indicator has been carried out and suitable nonextensive indicator of the Tsallis entropy has been determined.

Keywords: Husimi function, Nonclassical indicator, Perturbated harmonic oscillator, Tsallis entropy, Wigner function.

مقدمه

آنتروپی بدون شک یکی از مفاهیم اساسی در فیزیک است و نه تنها در ترمودینامیک و مکانیک آماری کلاسیک مورد استفاده قرار می‌گیرد، در مکانیک کوانتومی نیز کاربردهای وسیعی دارد. اخیراً از توابع توزیع کوانتومی در فضای فاز، که نقش مهمی در مطالعه سیستمهای کوانتومی دارند، برای تعریف آنتروپی استفاده شده است [۱]. در مکانیک کوانتومی اولین آنتروپی بر اساس ماتریس چگالی حالت مورد نظر نوشته شد. اما، اولین بار **وهرل^۱ در فضای فاز کوانتومی** با استفاده از تابع توزیع هوسیمی که همیشه مثبت است آنتروپی شبیه به آنتروپی فون نیومن^۲ معرفی نمود [۲]. و سپس آنتروپی منفردی^۳ - فیکس^۴ که بر اساس **تابع توزیع ویگنر تعریف گردید [۳]**. با توجه به این که در نظریه اطلاعات کوانتومی بین میزان اطلاعات مفید، عدم قطعیت کوانتومی و آنتروپی ارتباط نزدیکی وجود دارد، بنابراین محققین از آنتروپی تسالیس براساس ماتریس چگالی استفاده نمودند. بعداً صادقی و همکارانش آنتروپی تسالیس را بر اساس **توابع** توزیع حقیقی در فضای فاز کوانتومی معرفی نمودند [۴] و در این مقاله با بررسی آنتروپی کوانتومی تسالیس با استفاده از توابع توزیع ویگنر و هوسیمی میزان اطلاعات استخراج شده از این نمایش‌ها برای حالت نوسانگر هماهنگ با جملات اختلالی بهره گرفته شده است. در بخش بعدی، مروری بر آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی و شاخص غیرکلاسیکی δ که رابطه مستقیم با عدم قطعیت دارد، خواهیم داشت. در بخش سوم با مثال نوسانگر هماهنگ با اختلال‌های چندجمله‌ای شاخص غیرکلاسیکی که در نمایش ویگنر تعریف می‌شود با آنتروپی تسالیس تعریف شده در نمایش‌های ویگنر و

هوسیمی مقایسه می‌شود. آخرین بخش نیز به نتیجه گیری اختصاص خواهد داشت.

شاخص غیرکلاسیکی و آنتروپی تسالیس

شاخص غیرکلاسیکی: تابع توزیع ویگنر برای هر حالتی

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ipx} \langle q - \frac{x}{2} | \psi \rangle \langle \psi | q + \frac{x}{2} \rangle \quad (۱)$$

نشان داده می‌شود. در سال ۲۰۰۴ کنفک^۵ و زیخویسکی^۶ مشخصه غیر کلاسیکی بر پایه سهم منفی تابع ویگنر

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq dp |W(q, p)| - 1 \quad (۲)$$

ارائه نمودند [۵]. در ادامه، این شاخص و آنتروپی کوانتومی تسالیس مقایسه خواهند شد.

آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی: گروه صادقی آنتروپی تسالیس را بر اساس کلیه توابع توزیع حقیقی در فضای فاز کوانتومی به صورت [۴]

$$S_f = \frac{1}{f-1} \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(q, p)|^f dq dp \right] \quad (۳)$$

تعریف نمود، که در آن F تابع توزیع حقیقی در فضای فاز کوانتومی **مانند تابع ویگنر یا هوسیمی** و f شاخص نافزونفری است و میزان اطلاعات به دست آمده از تابع توزیع حالت مورد بررسی را نشان می‌دهد و $f = 1$ یا $f \neq 1$ **بیان گر آن است که اطلاعات به دست آمده از حالت مورد بررسی بر اساس تابع توزیع تعریف شده کامل یا ناکامل است.** در بخش بعد از نمایش‌های ویگنر و هوسیمی برای حالت نوسانگر هماهنگ ساده با اختلال‌های چند جمله‌ای استفاده خواهد شد.

^۴ Feix

^۵ Kenfak

^۶ Zyczkowski

^۱ Wehrl

^۲ Von Neumann

^۳ Manfredi

نوسانگرها با اختلال‌های چندجمله‌ای

حال در مورد یک سیستم فیزیکی متشکل از یک نوسان گر **هماهنگ** یک بعدی با اختلال‌های متناسب با q^4 و q^6 را مطالعه می‌کنیم. بنابراین **هامیلتونی** این سیستم به صورت

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) + \varepsilon_4 q^4 + \varepsilon_6 q^6 \quad (۴)$$

است. از آنجا که این مدل دقیقاً قابل حل نیست، خواص سیستم با استفاده از نظریه اختلال مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای اینکه از حالت‌های پایه این **هامیلتونی‌ها** اطلاعاتی به دست آید از مرتبه اول نظریه آشفتگی مستقل از زمان استفاده می‌شود [۶]. حالت به شکل ریاضی $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n} |2n\rangle$ نوشته می‌شود. که $|n\rangle$ حالت عددی نوسان گر هماهنگ را مشخص می‌کند و γ_{2n} نیز ضرایب **بهنجار** هستند که در ادامه بیان شده‌اند. در ادامه بحث ابتدا شاخص غیرکلاسیکی δ و آنتروپی تسالیس در نمایش‌های ویگنر و وهوسیمی را بررسی کرده و رفتار این دو شاخص مقایسه می‌شود. در ادامه $\omega = 1$ در نظر می‌گیریم.

شاخص غیرکلاسیکی: با استفاده از نظریه اختلال مرتبه اول، حالت پایه را **می‌توان** با برهم‌نهی محدود از حالت‌های فوک تقریب زد، به غیر از عناصر متقارن، همه عناصر ماتریس آشفتگی بر اساس حالت‌های ویژه انرژی سیستم غیرمختل شده، که در این مورد حالت‌های عددی $|n\rangle$ هستند، صفر هستند. تابع حالت برای حالت پایه اختلالی به شکل

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \varepsilon \sum_{k \neq 0} |k\rangle \frac{V_{k0}}{E_k - E_0} \quad (۵)$$

است که $V_{kn} = \langle n^{(0)} | V | k^{(0)} \rangle$ و V برابر با آشفتگی $\gamma_0 = \frac{1}{c}$ است. ضرایب **بهنجار** به صورت

$$\gamma_6 = -\sqrt{5}\gamma_0\varepsilon_6, \quad c = \frac{\sqrt{(96+117\varepsilon_4^2)+945\varepsilon_4\varepsilon_6+2055\varepsilon_6^2}}{4\sqrt{6}}$$

$$\gamma_4 = -\gamma_0\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{15\varepsilon_6}{2} + \varepsilon_4\right) \text{ و } \gamma_2 = -\frac{\gamma_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{45\varepsilon_6}{4} + 3\varepsilon_4\right)$$

است. همچنین با استفاده از رابطه‌های ۱ و ۵ می‌توان تابع توزیع ویگنر را محاسبه نمود.

$$W(z) = \frac{2}{\pi} e^{-2|z|^2} [\gamma_0^2 L_0(4|z|^2) + \gamma_2^2 L_2(4|z|^2) + \gamma_4^2 L_4(4|z|^2) + \gamma_6^2 L_6(4|z|^2) + 4\sqrt{2}\gamma_0\gamma_2 \times \text{Re}(z^2)L_0^2(4|z|^2) + \frac{16}{\sqrt{3}}\gamma_0\gamma_4 \text{Re}(z^4)L_0^4(4|z|^2) + \frac{32}{3\sqrt{5}}\gamma_0\gamma_6 \text{Re}(z^6)L_0^6(4|z|^2) + \frac{4}{\sqrt{3}}\gamma_2\gamma_4 \text{Re}(z^2) \times L_2^2(4|z|^2) + \frac{16}{3\sqrt{10}}\gamma_2\gamma_6 \text{Re}(z^4)L_2^4(4|z|^2) + \frac{8}{\sqrt{3}}\gamma_4\gamma_6 \text{Re}(z^2)L_4^2(4|z|^2)] \quad (۶)$$

که $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$ و $L_n^{(\alpha)}(x)$ چند جمله‌ای لاگر است. همچنین تابع توزیع هوسیمی با استفاده از رابطه

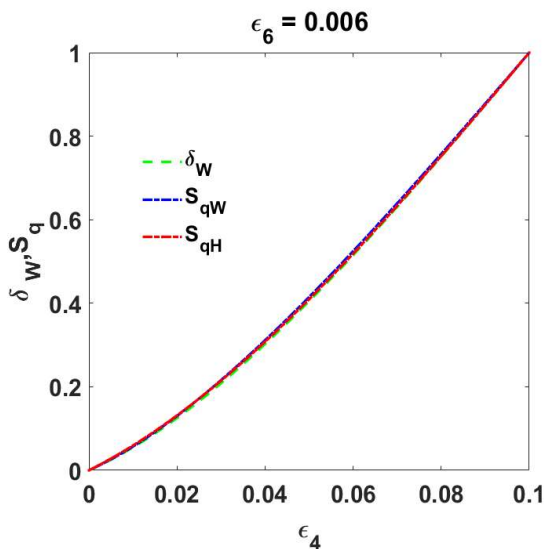
$$H(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq' dp' W(q', p') e^{-i(q'-q)^2 - (p'-p)^2} \quad (۷)$$

به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$H(q, p) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(q^2+p^2)} \left[\gamma_0^2 \frac{1}{2} + \gamma_2^2 \frac{1}{16}(q^2+p^2)^2 + \gamma_4^2 \frac{1}{768}(q^2+p^2)^4 + \gamma_6^2 \frac{1}{92160}(q^2+p^2)^6 - \gamma_0\gamma_2 \frac{\sqrt{2}}{4}(q^2-p^2) + \gamma_0\gamma_4 \frac{\sqrt{6}}{48}(q^4-p^4-6qp) + \gamma_0\gamma_6 \frac{\sqrt{5}}{480}(q^6-p^6-15q^2p^4+15q^4p^2) + \gamma_2\gamma_4 \frac{\sqrt{3}}{96}(p^2-q^2)(p^2+q^2)^2 + \gamma_6\gamma_4 \frac{\sqrt{30}}{23040} \times (q^2-p^2)(p^2+q^2)^4 + \gamma_2\gamma_6 \frac{\sqrt{10}}{1920}(p-q+\sqrt{2}q) \times (q-p+\sqrt{2}q)(q+p+\sqrt{2}q)(\sqrt{2}q-q-p) \times (p^2+q^2)^2 \right] \quad (۸)$$

با توجه به این‌که در مرجع [۴] رابطه مستقیم شاخص غیرکلاسیکی δ_W و عدم قطعیت بررسی شده و از طرفی آنتروپی هم نمادی از میزان عدم قطعیت است بنابراین ارتباط این دو شاخص امکان‌پذیر است. در شکل ۱ نمودار

شاخص غیرکلاسیکی δ در نمایش ویگنر و آنتروپی کوانتومی تسالیس با استفاده از رابطه ۳ به طور جداگانه در نمایش‌های ویگنر (S_{qW}) و هوسیمی (S_{qH}) برای مقادیر مختلفی از f بر حسب پارامتر اختلالی ϵ_4 برای یک مقدار ثابت ϵ_6 محاسبه شده است. انتخاب شاخص نافزونفری f مناسب برای هر یک از نمایش‌های ویگنر و هوسیمی به انطباق نمودار شاخص غیرکلاسیکی δ در نمایش ویگنر و آنتروپی تسالیس در نمایش مورد نظر بستگی دارد. لذا بهترین به‌دست آمده از طریق محاسبات عددی است، لذا بهترین انطباق به ازای f ‌های مختلف از آنتروپی تسالیس و شاخص غیرکلاسیکی برای حالتی هست که کمترین انحراف استاندارد مابین این دو پارامتر وجود داشته باشد. همچنین برای مقایسه آسان‌تر، هر دو کمیت به ۱ بهنجار شده‌اند. با توجه به شکل ۱ برای هر دو مقدار $\epsilon_4 = 0.016$ و $\epsilon_4 = 0.006$ در نمایش ویگنر $f = 0.9$ با انحراف استاندارد 0.307462 و برای نمایش هوسیمی $f = 0.6$ با انحراف استاندارد 0.208946 می‌شود که اطلاعات حالت نوسانگر هماهنگ با جملات اختلالی در نمایش‌های ویگنر و هوسیمی به طور کامل استخراج نمی‌شود. دلیل استخراج ناقص اطلاعات در نمایش ویگنر این است که حالت تحت بررسی حل دقیقی از هامیلتونی مورد بحث نیست و پاسخ تقریبی این هامیلتونی است و در نمایش هوسیمی هم علاوه بر دلیل یاد شده برای نمایش ویگنر در این مثال، هموار کردن تابع ویگنر می‌باشد که بخش دیگری از اطلاعات را از بین می‌برد [۷].



شکل ۱: شاخص غیرکلاسیکی δ در نمایش ویگنر و آنتروپی تسالیس در نمایش ویگنر و هوسیمی برای نوسانگر هماهنگ اختلالی بر حسب ضریب اختلال ϵ_4 و بر حسب ضریب ϵ_6 با مقادیر ثابت 0.006 انطباق شاخص غیرکلاسیکی و آنتروپی در نمایش ویگنر $f = 0.9$ با انحراف استاندارد 0.307462 و برای نمایش هوسیمی $f = 0.6$ با انحراف استاندارد 0.208946 است.

مرجع‌ها

- [1] V. V. Dodonov, A. S. M. de Castro, S. S. Mizrahi, *phys. Lett. A*, 98, 73, 2002.
- [2] A. Wehrl, *Reports on Mathematical Physics*, 16, 353, 1979.
- [3] G. Manfredi and M. R. Feix, *Phys. Rev. E*, 62, 4665 2000.
- [4] P. Sadeghi, S. Khademi, A. H. Daroonch, *Phys. Rev. A*, 86, 012119, 2012.
- [5] A. Kenfak and K. Zyczkowski, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 6, 396-404, 2004.
- [6] F. Albarelli, A. Ferraro, M. Paternostro and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. A*, 93, 032112, 2016.
- [7] F. Pennini, A. Plastino, D. F. Factors, *Phys. Lett. A*, 365, 262, 2007.

نتیجه گیری

در این مقاله به مقایسه شاخص غیرکلاسیکی δ در نمایش ویگنر و آنتروپی تسالیس تعریف شده در فضای فاز کوانتومی برای نمایش‌های ویگنر و هوسیمی برای نوسانگر هماهنگ با جملات اختلالی پرداخته شده است. با انطباق شاخص